Professional science applies the Creative Commons Attribution (CC BY 4.0) license to the materials published-
https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru|

UDC 622.1:528.7:004.932

Arno V.V., Kolesnichenko E.P., Lomakina N.E., Dolbin I.D. Influence of Point Density and Spatial Distribution on the Accuracy of Open-Pit Bench and Breakline Modelling

Влияние плотности и пространственного распределения точек на точность моделирования уступов и бровок карьера

Arno Veronika Vladimirovna
Ph.D., Associate Professor, Department of Geology and Mining,
North-Eastern State University, Magadan
Kolesnichenko Eva Pavlovna
Undergraduate Student
Master's Degree Program in State and Municipal Audit
Moscow State University, Moscow
Lomakina Natalia Evgenievna,
Senior Lecturer of the Department of Hygiene and Public Health,
Senior Lecturer of the Department of ETS,
North-Eastern Federal University, Magadan.
Dolbin Ivan Dmitrievich,
Undergraduate Student
of Polytechnic Institute North-Eastern State University, Magadan
Арно Вероника Владимировна
Кандидат технических наук, доцент кафедры Геологии и горного дела ФГБОУ ВО
Северо-Восточный государственный университет, г. Магадан
Колесниченко Ева Павловна,
Студентка 4 курса
направления подготовки «Государственный и муниципальный аудит»
ВШГА МГУ им. М.В. Ломоносова, г.Москва
Ломакина Наталья Евгеньевна,
Старший преподаватель кафедры ГиГД
ФГБОУ ВО Северо-Восточный государственный университет, г. Магадан
Долбин Иван Дмитриевич,
Студент 4 курса
Политехнический институт
ФГБОУ ВО «Северо-Восточный государственный университет

Abstract. *A study comprises 144 reconstructions of a 12 m bench with a 70° face. Densities of 1, 4 and 16 points/m² are tested for uniform, clustered, breakline-gap and feature-targeted sampling at equal point counts and 0.03 m height noise. All cases use linear TIN interpolation and the same profile-based breakline extractor. At 4 points/m², the mean crest-position RMSE is 0.0886, 0.3486, 0.5689 and 0.0168 m, respectively. Increasing density to 16 points/m² while retaining breakline gaps reduces this error only to 0.4906 m. Global uniformity therefore does not replace local coverage: targeted sampling has a high-density coefficient of variation but better preserves the modelled breaklines. Local density, distance to actual observations and independent profile errors should be assessed jointly. The results are hypothetical and do not establish regulatory survey requirements.*

Keywords: *mine surveying, point cloud, sampling density, spatial distribution, bench, breakline, TIN, local accuracy, data gaps.*

Аннотация. *Выполнено 144 модельных эксперимента по восстановлению уступа высотой 12 м с углом откоса 70°. Для плотностей 1, 4 и 16 точек/м² сопоставлены равномерная, кластерная, разреженная у бровок и*

Professional science applies the Creative Commons Attribution (CC BY 4.0) license to the materials published-
https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru|

целевая выборки при одинаковом числе точек и шуме высоты 0,03 м. Использованы единая линейная TIN-интерполяция и фиксированный профильный алгоритм выделения изломов. При 4 точках/м² средняя RMSE положения верхней бровки составляет 0,0886; 0,3486; 0,5689 и 0,0168 м соответственно. Рост средней плотности до 16 точек/м² при сохранении пропусков снижает эту ошибку лишь до 0,4906 м. Показано, что глобальная равномерность не заменяет локальное покрытие: целевое распределение имеет высокий коэффициент вариации плотности, но лучше описывает бровки в заданной модели. Предложена оценка по локальной плотности, расстоянию до фактических точек и независимым профильным ошибкам. Все данные модельные; нормативная достаточность съёмки не устанавливается.

Ключевые слова: *маркшейдерская съёмка, облако точек, плотность, пространственное распределение, уступ, бровка, триангуляция, локальная точность, пропуски данных.*

Рецензент: Торопцев Василий Владимирович - кандидат технических наук, доцент. ФГБОУ ВО «РГАУ-МСХА им. К.А. Тимирязева»

Введение

Среднее число точек на квадратный метр часто используют как краткую характеристику цифровой съёмки карьера. Однако этот показатель не описывает, где именно расположены наблюдения. Точки на ровной площадке не заменяют данные на верхней бровке, а многочисленные возвраты внутри одной полосы не устраняют тень на соседнем участке. Для моделирования уступа необходимо разделять общую точность поверхности и точность пространственного положения изломов.

Petras и соавторы показывают неоднородность плотности, перекрытия полос и пропуски ВЛС и предлагают несколько способов её картирования [1]. Agüera-Vega и соавторы исследуют взаимодействие плотности, размера ячейки и интерполятора на микрорельефе [2]. Cățeanu и Ciubotaru устанавливают зависимость устойчивости DTM к прореживанию от алгоритма и морфологии [3]. Пороговые значения лесной территории или лабораторного участка нельзя переносить на бровки карьера без объектовой проверки.

Jun Chen и соавторы используют топографическое знание при упрощении облаков, чтобы сохранять геоморфологическую информацию [4]. Bei и соавторы рассматривают влияние плотности и интерполяции на DEM и шероховатость [5]. Работы Török и соавторов [6] и Kovanič и соавторов [7] подтверждают значение сложной геометрии карьерных стенок и сочетания технологий, но не задают универсально достаточную плотность.

Štroner и соавторы показывают риск потери деталей на крутом рельефе при обработке облаков [8]. Klápště и соавторы отмечают чувствительность к настройкам, уклону и типу данных [9]. Braun и соавторы исследуют удаление растительности на горном объекте [10]. Эти публикации обосновывают необходимость контроля того, какие точки остаются около излома, а не только общего объёма файла.

Professional science applies the Creative Commons Attribution (CC BY 4.0) license to the materials published-
https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru|

Цель исследования — при фиксированном бюджете точек оценить влияние пространственного распределения на высоты и положение обеих бровок, а затем проверить эффект увеличения средней плотности при неизменном характере пропуска. Методический результат — совместный анализ площадной ошибки, полосовых показателей и профильной геометрии на независимом аналитическом эталоне.

Постановка и ограничения

Сравниваются искусственные координаты грунтовых точек с одинаковым заданным шумом. Физика сканирования, классификация растительности, ошибки совмещения и облачные коммерческие алгоритмы не моделируются. Четыре схемы — варианты расположения наблюдений, а не испытанные лётные задания. Целевая схема предполагает предварительную информацию о положении изломов; её преимущество нельзя считать бесплатным результатом последующей программной обработки.

Материалы и методы. Геометрия и контрольные данные

Область имеет размер 60 × 40 м и площадь A = 2400 м². Верхняя бровка задана функцией b(y) = 25 + 1,5sin(2πy/40), нижняя — b(y) + w. При H = 12 м, $\alpha = 70°$ и m = tanα горизонтальная ширина откоса w = H/m = 4,367643 м. Поверхность задаётся формулой:

$$z(x,y) = clip[H - m(x - b(y)); 0; H] + 0{,}005y \quad (1)$$

Небольшой общий уклон вдоль y не изменяет относительную высоту уступа. Нависающие и вертикальные элементы отсутствуют, поэтому допустима модель 2,5D. Эталонные бровки используются только при оценке; профильный алгоритм не получает их координаты.

Таблица 1

Общие параметры

Параметр	Значение
Плотности ρ; соответствующие N	1; 4; 16 точек/м² — 2400; 9600; 38 400 точек
Ошибки высоты	Независимые N(0; 0,03² м²); ошибок x,y нет
Схемы; число повторов	4 схемы × 3 плотности × 12 = 144 модели
Контроль высот	11 475 независимых от выборки координат; шаг 0,4 м
Контрольная область	x ∈ [3;57), y ∈ [3;37); внешняя полоса исключена
Поперечники	61 профиль, y = 2; 2,6; …; 38 м
Профильная сетка	x = 15…40 м; шаг 0,05 м; 501 отсчёт
Начальное число генератора	20262000 + 1000ρ + 10k + j; k=0…11, j=0…3

$$\rho = \frac{N}{A}; \; h_{nom} = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \quad (2)$$

При ρ = 4 получаем N = 9600 и hnom = 0,5 м. Это эквивалентный шаг квадратной сетки, а не фактическое расстояние до ближайшего соседа. Для иллюстраций отдельно использованы seed = 20261022 + j. Все контрольные узлы проверены на попадание

Professional science applies the Creative Commons Attribution (CC BY 4.0) license to the materials published-
https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru|

внутрь выпуклой оболочки данных; за её пределами поверхность не экстраполировалась.



Рисунок 1 — Иллюстративные выборки при ρ = 4;
размер каждого плана 60 × 40 м

Материалы и методы. Распределение и восстановление

Таблица 2

Схемы при одинаковых N и площади

Схема	Правило формирования
Равномерная	По одной точке в каждой исходной ячейке; независимый сдвиг внутри ±0,45 стороны. Сторона 1; 0,5; 0,25 м.
Кластерная	20 % точек равномерны, 80 % — четыре гауссовых скопления σxy = 4 м с центрами (10;10), (10;30), (48;10), (48;30); точки вне области перегенерируются.
Пропуски	Равномерная выборка вне полос |x−b(y)| ≤ 0,7 м и |x−b(y)−w| ≤ 0,7 м. N восстанавливается добавлением точек вне полос.
Целевая	60 % точек равномерны, 40 % — в полосах ±0,6 м около предварительных линий bp(y) = 25 + 1,3sin(2πy/40) + 0,15 и bp(y)+w.

Предварительные линии не совпадают с эталоном: максимальное расхождение по x равно 0,35 м. Это заданная дополнительная информация, не результат восстановления по истинным бровкам. Простое добавление интерполированных точек внутрь пробела не эквивалентно такой выборке фактических наблюдений.

$$CV_\rho = \frac{sd(n_j)}{mean(n_j)};\ f_0 = \frac{\#\{n_j=0\}}{M} \quad (3)$$

В (3) n_j — число точек в ячейках 1 × 1 м, M = 2400; пустые ячейки включены. Для локального контроля используются полосы ±1 м по x у двух эталонных бровок

Professional science applies the Creative Commons Attribution (CC BY 4.0) license to the materials published-
https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru|

площадью Ab = 160 м² и расстояния от контрольных точек бровок до ближайшей фактической точки в плане:

$$\rho_b = \frac{N_b}{A_b};\ r_{95} = Q_{0,95}\{d_j\};\ d_j = min_{\text{i}}||b_j - p_i||xy \quad (4)$$

$$\hat{z}(x,y) = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3;\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \quad (5)$$

Для всех данных используется одна линейная интерполяция по триангуляции Делоне, без принудительного задания структурных линий. В профиле высоты сглаживаются гауссовым фильтром σ = 2 отсчёта = 0,10 м; градиент берётся центральной разностью. Бровки — пересечения градиентом порога:

$$g(x) = \frac{\partial \hat{z}}{\partial x} = -0{,}5tan70° \quad (6)$$

Выбирается самый длинный связный участок g ниже порога длиной не менее четырёх отсчётов. Координаты пересечений линейно уточняются между соседними узлами. Порог основан на заданном номинальном угле и одинаков для всех схем; изменение алгоритма или сглаживания может изменить ошибки.

Результаты. Одинаковая плотность, разная точность

$$RMSE_z = \sqrt{(\frac{\sum(\hat{z}_{\text{i}} - z_{\text{i}},true)^2}{n}} \quad (7)$$

$$RMSE_b = \sqrt{(\frac{\sum(\hat{x}b,j - xb,j,true)^2}{K}};\ K = 61 \quad (8)$$

Высоты оцениваются отдельно по всей контрольной области и в полосах ±1 м у бровок. Ошибки линий — отклонения x в фиксированных поперечниках, не нормальное расстояние до пространственной кривой и не полная плановая геодезическая ошибка. Таблицы содержат средние метрики 12 повторов; профили одного облака зависимы и не объявляются независимыми испытаниями.

Таблица 3

Средние ошибки при N = 9600, м

Распределение	RMSEz, область	RMSEz, полосы	RMSE верхней	RMSE нижней	Средний P95*
Равномерное	0,0312	0,0869	0,0886	0,0843	0,1743
Кластерное	0,1155	0,4121	0,3486	0,3317	0,6693
Пропуски у бровок	0,1811	0,6605	0,5689	0,5790	0,7807
Целевое у изломов	0,0219	0,0289	0,0168	0,0178	0,0336

* Среднее по повторам значение 95%-ного квантиля абсолютных ошибок двух линий; это не доверительная граница точности для действующего карьера.

По таблице 3 глобальная RMSEz 0,0312 м у равномерной схемы сопровождается RMSE верхней бровки 0,0886 м. При пропусках соответствующие значения равны

Professional science applies the Creative Commons Attribution (CC BY 4.0) license to the materials published-
https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru|

0,1811 и 0,5689 м. Ранжирование поверхности по общему среднему не отражает полностью качества её изломов. Целевая схема имеет наименьшие ошибки именно при принятой предварительной информации и интерполяторе.

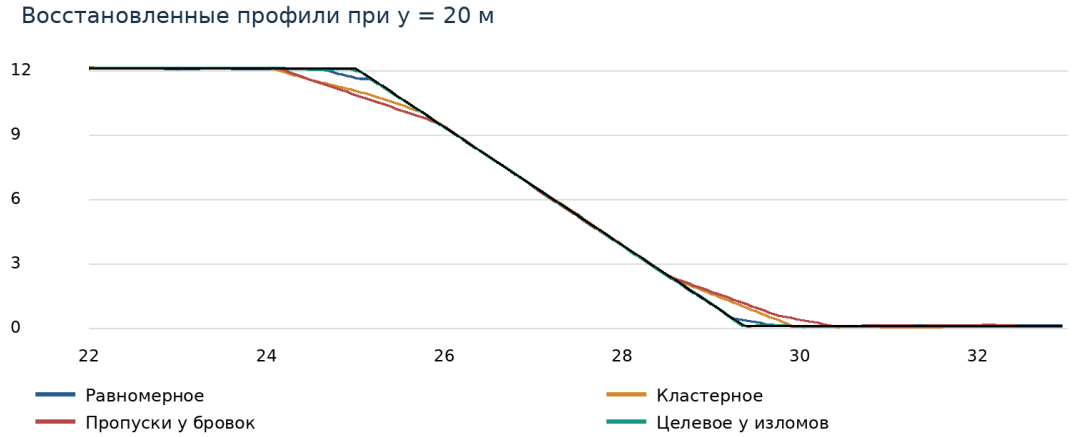

Рисунок 2 — Иллюстративный поперечник: чёрный профиль — эталон; x и z в метрах

В отдельной равномерной реализации сумма квадратов отклонений верхней бровки на 61 профиле равна 0,597137 м². По (8): RMSEb = √(0,597137/61) = 0,098940 м. Значение отличается от среднего 0,0886 м в таблице, поскольку относится к одному облаку. На y = 20 м истинные бровки x = 25,000000 и 29,367643 м, восстановленные — 25,154446 и 29,288754 м.

Результаты. Рост плотности и сохранение пропусков

Таблица 4

RMSE верхней бровки: среднее ± СКО по 12 повторам, м

ρ, точек/м²	Равномерное	Кластерное	Пропуски	Целевое
1	0,2282 ± 0,0188	0,8493 ± 0,2465	0,7337 ± 0,0902	0,0561 ± 0,0077
4	0,0886 ± 0,0060	0,3486 ± 0,0550	0,5689 ± 0,0217	0,0168 ± 0,0019
16	0,0243 ± 0,0020	0,1322 ± 0,0147	0,4906 ± 0,0175	0,0077 ± 0,0010

По таблице 4 рост ρ от 1 до 16 уменьшает ошибку равномерной схемы с 0,2282 до 0,0243 м, а при пропусках — с 0,7337 до 0,4906 м. Увеличение числа точек снаружи пробела не восстанавливает сам излом в рамках выбранной интерполяции и профильного алгоритма. Это не доказательство невозможности восстановления с дополнительными геометрическими ограничениями.

Professional science applies the Creative Commons Attribution (CC BY 4.0) license to the materials published-
https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru|

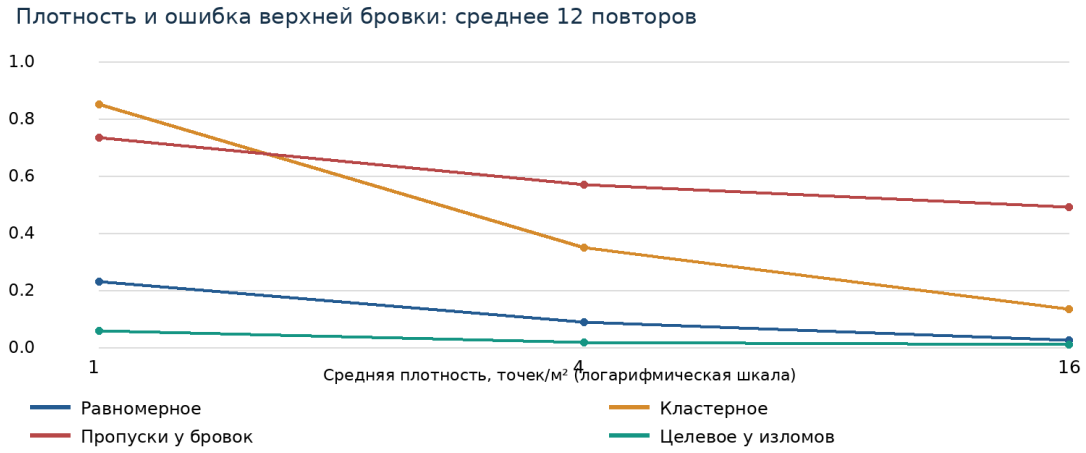

Рисунок 3 — Зависимость RMSE положения верхней бровки от средней плотности

Целевая схема при 4 точках/м² даёт среднюю RMSEb 0,0168 м и в модели превосходит равномерную при 16 точках/м² (0,0243 м), используя вчетверо меньше точек. Бюджет точек при этом не равен бюджету съёмки: получение предварительной линии, дополнительные ракурсы и изменение траектории требуют самостоятельной оценки. Экономическая эффективность не рассчитывалась.

$$\rho_{surf} = \frac{\rho_{xy}}{\sqrt{(1+z_x{}^2+z_y{}^2)}} \quad (9)$$

Плотность в плане не равна плотности по поверхности. Для локальной плоскости с уклоном 70° и без поперечного градиента ρsurf ≈ ρxy cos70°. Тогда 4 точки/м² в плане соответствуют примерно 1,368 точки/м² поверхности. На криволинейном уступе преобразование выполняется локально. Смешение этих определений затрудняет сравнение ВЛС, TLS и фотограмметрии.

Результаты. Локальное покрытие и глобальная неоднородность

Таблица 5

Покрытие при ρ = 4: среднее по повторам

Распределение	**ρb, точек/м²**	**r95, м**	**CVρ**	**Пустые ячейки, %**
Равномерное	3,99	0,3664	0,0000	0,00
Кластерное	0,81	1,1069	1,2479	20,20
Пропуски у бровок	1,29	1,0168	0,5337	4,04
Целевое у изломов	26,37	0,1481	1,7275	8,49

По таблице 5 целевая схема имеет высокий глобальный CVρ = 1,728, но малое r95 = 0,148 м. Кластерная неоднородность даёт CVρ = 1,248 и r95 = 1,107 м, хотя средняя

Professional science applies the Creative Commons Attribution (CC BY 4.0) license to the materials published-
https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru|

плотность та же. Следовательно, требование минимального CV без привязки к задаче может отвергать полезную концентрацию точек у изломов. Это не отменяет контроля полноты остальной территории.

Даже полосовая плотность не исчерпывает проблему. При $\rho = 16$ схема с пробелами имеет $\rho b \approx 5{,}03$ точки/м² — больше, чем равномерная схема с $\rho = 4$. Однако критическая внутренняя полоса ±0,7 м остаётся ненаблюдаемой, $r95 \approx 0{,}835$ м, а RMSEb = 0,4906 м. Нужно учитывать размещение точек внутри полосы, а не только её среднее заполнение.

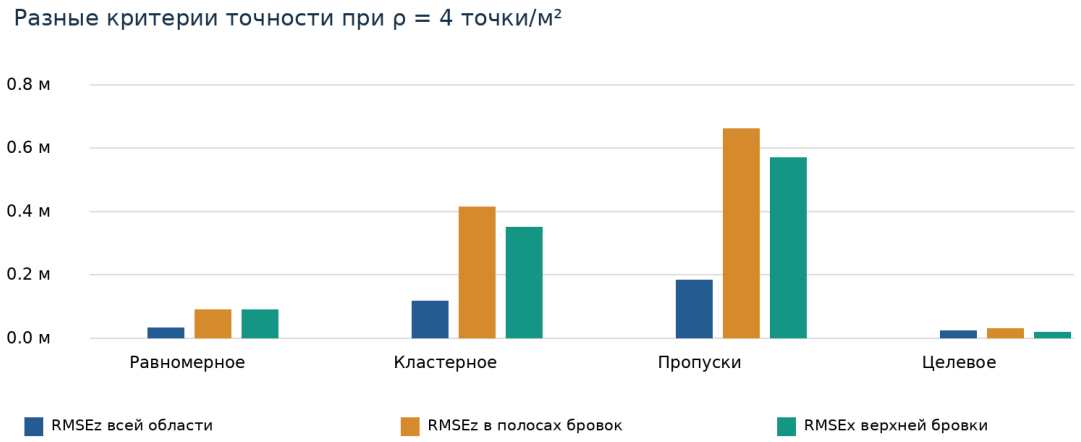

Рисунок 4 — Общая, локальная высотная и профильная ошибки измеряют разные свойства

На рисунке 4 различия в локальных метриках выражены сильнее общей RMSEz. При этом во всех 144 моделях алгоритм выдал обе бровки во всех 61 профиле. Такая 100%-ная вычислительная полнота не означает правильности линий: при кластеризации и пробелах получены значительные отклонения. Необходимо проверять положение, а не только наличие векторного объекта.

Нулевой CV равномерной схемы — свойство идеализированной стратифицированной выборки и согласованной сетки подсчёта 1 × 1 м, а не ожидаемая характеристика реального сканирования. Для натурного контроля нужны проверки при нескольких положениях и масштабах окна, контроль полос и локальные карты пропусков [1, 5].

Обсуждение и инженерная оценка

$$\sigma_{TIN}{}^2 = \sum \lambda_i{}^2 \sigma z,_i{}^2 \quad (10)$$

На плоском участке при независимых высотных ошибках формула (10) даёт шум интерполяции трёх вершин. Увеличение плотности без изменения метода не означает усреднения всех N точек. Ошибка модели около излома добавляется к этому шуму;

Professional science applies the Creative Commons Attribution (CC BY 4.0) license to the materials published-
https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru|

общая ошибка привязки в опыте отсутствует. Достижение сантиметровой RMSE на аналитическом эталоне не доказывает сантиметровую точность съёмочной сети.

$$\delta x \approx \frac{\delta z}{tan\alpha};\ \hat{\alpha} = arctan\frac{H}{\hat{x}toe - \hat{x}crest} \quad (11)$$

Для одной наклонной линии δz = 0,03 м при α = 70° даёт δx ≈ 0,01092 м; это не нижняя граница ошибки извлечения бровки. Она не учитывает пропуски и распознавание перехода. Угол α̂ в таблице 6 вычислен по восстановленной ширине одного поперечника при независимо принятом H = 12 м, а не, по новой оценке, высоты.

Таблица 6

Один иллюстративный профиль y = 20 м

Распределение	Ширина откоса, м	Восстановленный угол, °
Равномерное	4,134	70,990
Кластерное	4,515	69,379
Пропуски у бровок	5,377	65,866
Целевое у изломов	4,363	70,019

Изменение ширины откоса при пробеле отражает интерполяцию и принятый детектор, а не физическое изменение уступа. Иной метод — например, пересечение независимо оценённых плоскостей или TIN со структурными линиями — может дать другие результаты. В поле дополнительно необходимы контроль x,y,z, независимые профили и проверка ракурсов [6–10].

Выводы

1. При одинаковых N = 9600 точек средняя RMSE верхней бровки равна 0,0886; 0,3486; 0,5689 и 0,0168 м для четырёх схем. Средняя плотность недостаточна как единственный показатель качества.

2. Рост ρ до 16 точек/м² при сохранении пропуска оставляет RMSEb = 0,4906 м. Полноту и расстояния до фактических наблюдений необходимо контролировать локально.

3. Высокий CV целевой выборки сочетается с лучшим результатом на изломах. Требуются совместные критерии по всей поверхности и критическим линиям, а не только глобальная равномерность.

4. Результаты получены на одной аналитической геометрии с идеальными x,y. Они зависят от предварительной информации, TIN, сглаживания и детектора и не задают нормативной минимальной плотности.

References

1. Petras V., Petrasova A., McCarter J. B., Mitasova H., Meentemeyer R. K. Point Density Variations in Airborne Lidar Point Clouds // Sensors. — 2023. — Vol. 23, no. 3. — Art. 1593. — DOI: 10.3390/s23031593.

Professional science applies the Creative Commons Attribution (CC BY 4.0) license to the materials published-
https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru|

2. Agüera-Vega F., Agüera-Puntas M., Martínez-Carricondo P., Mancini F., Carvajal F. Effects of point cloud density, interpolation method and grid size on derived Digital Terrain Model accuracy at micro topography level // International Journal of Remote Sensing. — 2020. — Vol. 41, no. 21. — P. 8281–8299. — DOI: 10.1080/01431161.2020.1771788.

3. Cățeanu M., Ciubotaru A. The Effect of LiDAR Sampling Density on DTM Accuracy for Areas with Heavy Forest Cover // Forests. — 2021. — Vol. 12, no. 3. — Art. 265. — DOI: 10.3390/f12030265.

4. Chen J., Xiong L., Yin B., Hu G., Tang G. Integrating topographic knowledge into point cloud simplification for terrain modelling // International Journal of Geographical Information Science. — 2023. — Vol. 37, no. 5. — P. 988–1008. — DOI: 10.1080/13658816.2023.2180801.

5. Bei Y., Chen C., Wang X., Sun Y., He Q., Li K. Effects of Airborne LiDAR Point Cloud Density and Interpolation Methods on the Accuracy of DEM and Surface Roughness // Journal of Geo-information Science. — 2023. — Vol. 25, no. 2. — P. 265–276. — DOI: 10.12082/dqxxkx.2023.220486.

6. Török Á., Bögöly G., Somogyi Á., Lovas T. Application of UAV in Topographic Modelling and Structural Geological Mapping of Quarries and Their Surroundings—Delineation of Fault-Bordered Raw Material Reserves // Sensors. — 2020. — Vol. 20, no. 2. — Art. 489. — DOI: 10.3390/s20020489.

7. Kovanič Ľ., Peťovský P., Topitzer B., Tokarčík O. Qualitative Assessment of Point Cloud from SLAM-Based MLS for Quarry Digital Twin Creation // Applied Sciences. — 2025. — Vol. 15, no. 22. — Art. 12326. — DOI: 10.3390/app152212326.

8. Štroner M., Urban R., Lidmila M., Kolář V., Křemen T. Vegetation Filtering of a Steep Rugged Terrain: The Performance of Standard Algorithms and a Newly Proposed Workflow on an Example of a Railway Ledge // Remote Sensing. — 2021. — Vol. 13, no. 15. — Art. 3050. — DOI: 10.3390/rs13153050.

9. Klápště P., Fogl M., Barták V., Gdulová K., Urban R., Moudrý V. Sensitivity analysis of parameters and contrasting performance of ground filtering algorithms with UAV photogrammetry-based and LiDAR point clouds // International Journal of Digital Earth. — 2020. — Vol. 13, no. 12. — P. 1672–1694. — DOI: 10.1080/17538947.2020.1791267.

10. Braun J., Braunová H., Suk T., Michal O., Peťovský P., Kuric I. Structural and Geometrical Vegetation Filtering — Case Study on Mining Area Point Cloud Acquired by UAV Lidar // Acta Montanistica Slovaca. — 2021. — Vol. 26, no. 4. — P. 661–674. — DOI: 10.46544/AMS.v26i4.06.