

PHYSICAL SCIENCES

UDC 530.145

Golikov D.S. Lax pair of the fermion model system

Пара Лакса модельной системы фермионов

Golikov Dmitriy Sergeevich,

researcher, Moscow State University, Faculty of Physics, Moscow

Голиков Дмитрий Сергеевич,

научный сотрудник, Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва

Abstract. A system of identical fermions is considered. The Hamiltonian equations corresponding to the true symbol of the system are presented in equivalent form. Solutions to the equations of motion are obtained. An equivalent form of the Hamiltonian equations, which admits representation as a Lax pair, is considered.

Keywords: model system of fermions, true symbol, Hamiltonian equations, Lax pair

Аннотация. Рассмотрена система тождественных фермионов. Уравнения Гамильтона, соответствующие истинному символу системы, представлены в эквивалентной форме. Получены решения уравнений движения. Рассмотрена эквивалентная форма уравнений Гамильтона, допускающая представление в виде пары Лакса.

Ключевые слова: модельная система фермионов, истинный символ, уравнения гамильтона, пара Лакса

Рецензент: Торопцев Василий Владимирович - кандидат технических наук, доцент.
 ФГБОУ ВО «РГАУ-МСХА им. К.А. Тимирязева»

Рассмотрим систему N тождественных частиц массы m , подчиняющихся статистике Ферми-Дирака, которые находятся на трёхмерном торе T , длины сторон которого равны L_1, L_2, L_3 . Случай бозонов исследован в работе [1]. Будем считать, что потенциал взаимодействия ферми-частиц между собой имеет вид:

$$V(x, y) = V\left(\sqrt[3]{N}(x - y)\right), \quad (7.1)$$

где $V(x)$ – финитная чётная функция, $x, y \in T$. Отметим, что потенциал взаимодействия (формула (7.1)) зависит от N таким образом, что радиус потенциала взаимодействия уменьшается с увеличением числа частиц N .

Истинным символом ультравторично квантованной задачи будем называть функционал [2]

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\alpha[\Phi^+(\cdot), \Phi(\cdot)] = & \iint dx dy \Phi^+(x, y) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} (\Delta_x + \Delta_y) + \alpha V(x, y) \right) \Phi(x, y) + \\ & + 2N \iint dx dy dx' dy' V(x, y) \Phi^+(x, y) \Phi^+(x', y') \Phi(x, x') \Phi(y', y), \end{aligned} \quad (7.2)$$

определенный для пары антисимметричных относительно перестановок аргументов функций $\Phi^+(x, y)$, $\Phi(x, y)$, заданных на $L_2(T_2)$, Δ_x — оператор Лапласа, действующий по аргументу x . Параметр $\alpha \in [0, 1]$ определяет степень учёта второго слагаемого в первом интеграле.

Из сохранения числа частиц в системе для функций $\Phi^+(x, y)$, $\Phi(x, y)$, следует условие

$$\iint dx dy \Phi^+(x, y), \Phi(x, y) = \frac{1}{2}. \quad (7.3)$$

СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ГАМИЛЬТОНА

Согласно асимптотическим методам [3], каждому решению нестационарной системы уравнений

$$i\dot{\Phi}(x, y, t) = \frac{\delta \mathcal{H}_\alpha}{\delta \Phi^+(x, y, t)}, \quad -i\dot{\Phi}^+(x, y, t) = \frac{\delta \mathcal{H}_\alpha}{\delta \Phi(x, y, t)}, \quad (7.4)$$

удовлетворяющему условию (7.3), в пределе при стремлении числа частиц к бесконечности соответствует асимптотическая серия собственных функций и собственных значений соответствующего оператора [2].

Для символа, определённого формулой (7.2), уравнения Гамильтона примут вид:

$$i\dot{\Phi}(x, y, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} (\Delta_x + \Delta_y) + \alpha V(x, y) \right) \Phi(x, y, t) + \\ + 2N \iint dx' dy' (V(x, y) + V(x', y')) \Phi^+(x', y', t) \Phi(x, x', t) \Phi(y', y, t), \quad (7.5)$$

$$-i\dot{\Phi}^+(x, y, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} (\Delta_x + \Delta_y) + \alpha V(x, y) \right) \Phi^+(x, y, t) + \\ + 2N \iint dx' dy' (V(x, x') + V(y, y')) \Phi(x', y', t) \Phi^+(x, x', t) \Phi(y', y, t). \quad (7.6)$$

Как было показано в работе [4], функции

$$\tilde{R}(x, y, t) = \sqrt{N} \Phi^+(x, y, t), \quad G(x, y, t) = 2N \int dz \Phi^+(x, z, t) \Phi(y, z, t), \\ R(x, y, t) = 2\sqrt{N} \left(\alpha \Phi(x, y, t) - \int dz \Phi(x, z, t) G(z, y, t) \right), \quad (7.7)$$

заданные на $L_2(T_2)$, обладающие в силу антисимметрии $\Phi^+(x, y)$, $\Phi(x, y)$ свойствами

$$R(x, y, t) = -R(y, x, t), \quad \tilde{R}(x, y, t) = -\tilde{R}(y, x, t) \\ \int dz G(x, z, t) G(z, y, t) = \int dz \tilde{R}(x, z, t) R(z, y, t) + \alpha G(x, y). \quad (7.8)$$

и нормировкой

$$\int dx G(x, x, t) = N, \quad (7.9)$$

удовлетворяют системе уравнений

$$i\dot{G}(x, y, t) = \frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_x - \Delta_y)G(x, y, t) + \int dz (V(x, z) - V(y, z))\tilde{R}(x, z, t) R(z, y, t), \quad (7.10)$$

$$i\dot{R}(x, y, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_x + \Delta_y) + \alpha V(x, y) \right) R(x, y, t) - \int dz (V(x, z)R(x, z, t) G(z, y, t) + V(y, z)R(z, y, t)G(z, x, t)), \quad (7.11)$$

$$-i\dot{\tilde{R}}(x, y, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_x + \Delta_y) + \alpha V(x, y) \right) \tilde{R}(x, y, t) - \int dz (V(x, z)\tilde{R}(x, z, t) G(y, z, t) + V(y, z)\tilde{R}(z, y, t)G(x, z, t)), \quad (7.12)$$

если функции $\Phi^+(x, y)$, $\Phi(x, y)$ удовлетворяют системе уравнений Гамильтона (формулы (7.5), (7.6)).

ЭКВИВАЛЕНТНОЕ ОПЕРАТОРНОЕ УРАВНЕНИЕ

Далее произведём преобразование эквивалентных уравнений Гамильтона к виду одного операторного уравнения [5].

Рассмотрим нестационарные решения

$$\begin{aligned} G(x, y, t) &= G(x, y), \\ \tilde{R}(x, y, t) &= \tilde{R}(x, y)e^{i\Omega t}, \\ R(x, y, t) &= R(x, y)e^{-i\Omega t}. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Подстановка общих нестационарных решений (7.13) в уравнения (7.10)-(7.12) приводит к стационарным уравнениям:

$$\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_x - \Delta_y)G(x, y) + \int dz (V(x, z) - V(y, z))\tilde{R}(x, z) R(z, y) = 0, \quad (7.14)$$

$$\begin{aligned} \Omega R(x, y) &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_x + \Delta_y) + \alpha V(x, y) \right) R(x, y) - \\ &- \int dz (V(x, z)R(x, z) G(z, y) + V(y, z)R(z, y)G(z, x)), \end{aligned} \quad (7.15)$$

$$\begin{aligned} \Omega \tilde{R}(x, y) &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_x + \Delta_y) + \alpha V(x, y) \right) \tilde{R}(x, y) - \\ &- \int dz (V(x, z)\tilde{R}(x, z) G(y, z) + V(y, z)\tilde{R}(z, y)G(x, z)). \end{aligned} \quad (7.16)$$

Оказывается, что, аналогично [6], эти уравнения можно записать в виде пары Лакса, то есть одного операторного уравнения.

Утверждение. Система уравнений (7.14)-(7.16) может быть записана в виде

$$[\hat{A}, \hat{L}]_- = 0. \quad (7.17)$$

Матрицы $\hat{A}, \hat{L}$ имеют вид:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \hat{G} - \frac{\alpha}{2} & -\hat{R} \\ \hat{R} & \frac{\alpha}{2} - \hat{G}^T \end{pmatrix}, \quad \hat{L} = \begin{pmatrix} \hat{T} & -\hat{B} \\ \hat{B} & -\hat{T} \end{pmatrix}, \quad (7.18)$$

где $\hat{G}, \hat{R}, \hat{B}$ – операторы с ядрами $G(x, y), R(x, y), \tilde{R}(x, y), \hat{G}^T$ – транспонированный оператор с ядром $G(y, x)$, а ядра операторов матрицы $\hat{L}$ задаются следующим образом:

$$\begin{aligned} T(x, y) &= -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_x \delta(x - y) - \frac{\Omega}{2} \delta(x - y), \\ B(x, y) &= V(x, y) R(x, y), \\ \tilde{B}(x, y) &= V(x, y) \tilde{R}(x, y), \end{aligned}$$

где $\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака.

Доказательство. Действительно, запишем равенства (7.17) по элементам:

$$\begin{aligned} \hat{G}\hat{T} - \hat{R}\hat{B} - \hat{T}\hat{G} + \hat{B}\hat{R} &= 0, \\ \hat{R}\hat{T} - \hat{G}^T\hat{B} - \hat{B}\hat{G} + \hat{T}\hat{R} + \alpha\hat{B} &= 0, \\ \hat{R}\hat{T} - \hat{G}\hat{B} - \hat{B}\hat{G}^T + \hat{T}\hat{R} + \alpha\hat{B} &= 0, \\ \hat{G}^T\hat{T} - \hat{R}\hat{B} + \hat{B}\hat{R} - \hat{T}\hat{G}^T &= 0. \end{aligned}$$

Представляя произведения операторов через свёртку их ядер, получим, что первые три уравнения в точности совпадают с уравнениями (7.14)-(7.16), а четвёртое уравнение

$$-\frac{\hbar^2}{2m} (\Delta_x - \Delta_y) G(y, x) - \int dz (V(x, z) - V(y, z)) R(x, z) \tilde{R}(z, y) = 0$$

взаимной заменой x на y , приводится к уравнению (7.14).

References

1. Maslov V.P. // TMP. 2005. V. 143. № 3. P. 307-327.
2. Golikov D.S. // VMU. 2009. № 1. P. 23-26.
3. Maslov V.P., Shvedov O.Yu. // Complex germ method in many-particle problems and quantum field theory. M.: URSS. 2000.
4. Golikov D.S. School of Science, 2022. V. 51, № 2. P. 1-2.
5. Maslov V.P., Ruuge A.E. // Math. Notes. 1999. №66:5. P. 792-796.
6. Koval G.V., Maslov V.P. // Math. Notes. 2007. № 82:1. P. 52-57.