

MEDICAL RESEARCH AND HEALTHCARE

UDC 519.17:573:616-036.22

Andreev I.R., Votyakova M.A., Zhuravleva M.A. Differential Equation Models in Epidemiology: SIR, SEIR

Модели дифференциальных уравнений в эпидемиологии: SIR, SEIR

Andreev Igor Removich,

Teacher, Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration, Moscow

Votyakova Marina Alexandrvna,

Teacher, Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration, Moscow

Zhuravleva Maria Andreevna,

Student, Analytical Control Group of Chemical Compounds, Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration, Moscow

Андреев Игорь Рэмович,

преподаватель, Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации, г. Москва

Вотякова Марина Александровна,

преподаватель, Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации, г. Москва

Журавлева Мария Андреевна,

студент, группа аналитического контроля химических соединений, Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации, г. Москва

Abstract. *The study explores epidemic modeling via ODE systems, including the SIR model (Kermack, McKendrick, 1927), for outbreak analysis and prediction.*

Keywords: *SIR, SEIR, epidemic, incubation period, mathematical modeling.*

Аннотация. *Исследуется моделирование эпидемий с помощью систем ОДУ, включая модель SIR (Kermack, McKendrick, 1927), для анализа и прогнозирования вспышек.*

Ключевые слова: *SIR, SEIR, эпидемия, инкубационный период, математическое моделирование.*

Рецензент: Сагитов Рамиль Фаргатович - кандидат технических наук, доцент.
Заместитель директора, главный научный сотрудник. ООО «Научно-исследовательский проектный институт «Промышленное и гражданское строительство»

Введение

Простейшие дифференциальные модели описывают динамику инфекционного заболевания, разделяя популяцию на несколько групп и задавая скорость перехода между ними с помощью систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Данный подход позволяет исследовать механизм распространения инфекций, прогнозировать развитие эпидемий и оценивать эффективность карантинных мер.

1. Классическая модель SIR

Наиболее известной и фундаментальной является модель SIR (Kermack – McKendrick, 1927), в которой популяция постоянного размера *N* делится на три компартмента:

S (Susceptible) – восприимчивые к болезни индивиды;

I (Infectious) – инфицированные и заразные индивиды;

R (Recovered) – выздоровевшие (с приобретенным иммунитетом) или умершие.

Динамика системы описывается следующей системой ОДУ:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta \frac{I * S}{N}$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta \frac{I * S}{N} - \gamma I$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I$$

где: β – коэффициент передачи, отражающий скорость заражения;

γ – скорость выздоровления (величина, обратная средней продолжительности инфекционного периода: $1/\gamma$).

Ключевым эпидемиологическим параметром модели является базовое репродуктивное число $R_0 = \beta / \gamma$. Эпидемия приобретает характер вспышки, если $R_0 > 1$.

Ограничения модели SIR:

- Упрощенные допущения о популяции: модель предполагает однородность и замкнутость популяции, что редко выполняется на практике.

- Отсутствие инкубационного периода: инфицированные становятся заразными мгновенно, что может приводить к завышению скорости распространения на ранних этапах.

- Пожизненный иммунитет: не учитывается возможность повторного заражения.

- Игнорирование пространственной структуры: не учитывается влияние миграции и плотности населения.

2. Процесс работы с моделью

Типичный процесс математического моделирования включает несколько этапов:

1. Сбор данных: используются временные ряды официальной статистики (ежедневные новые случаи, данные о выздоровлениях).

2. Численное решение системы: система ОДУ решается численными методами.

3. Подгонка параметров: с помощью методов оптимизации параметры β и γ подбираются таким образом, чтобы модельная кривая наилучшим образом аппроксимировала реальные данные.

3. Усовершенствованная модель SEIR

Для анализа эпидемий с выраженным инкубационным периодом (например, COVID-19) применяется модель SEIR, являющаяся развитием модели SIR. Она вводит дополнительную группу:

E (Exposed) – инфицированные, но еще не заразные индивиды (находящиеся в латентном периоде).

Система уравнений модифицируется следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\beta \frac{I * S}{N} \\ \frac{dE}{dt} &= \beta \frac{I * S}{N} - \sigma E \\ \frac{dI}{dt} &= \sigma E - \gamma I\end{aligned}$$

Преимущества модели SEIR:

- Учет инкубационного периода: позволяет более точно отразить биологию многих заболеваний и избежать завышения скорости раннего распространения.
- Повышение точности прогнозов: модель лучше предсказывает пик заболеваемости и общую динамику эпидемии.
- Оценка эффективности мер: предоставляет инструмент для анализа эффективности мер, направленных на выявление и изоляцию бессимптомных носителей.

Заключение

Математическое моделирование является мощным инструментом для анализа и прогнозирования распространения инфекционных заболеваний. Классическая модель SIR служит базой для понимания фундаментальных принципов, в то время как более сложные модели, такие как SEIR, позволяют учесть дополнительные биологические и социальные факторы, повышая адекватность прогнозов и обеспечивая научную основу для принятия управленческих решений в сфере здравоохранения.

References

1. Янчевская Е.Ю., Меснянкина О.А. Математическое моделирование и прогнозирование в эпидемиологии инфекционных заболеваний. – 2019. – № 3. – С. 338–344.
2. Кольцова Э.М., Куркина Е.С., Васецкий А.М. Математическое моделирование эпидемий коронавируса COVID-19 в Москве. – 2019. – № 1. – С. 99–105.
3. Kermack W.O., McKendrick A.G. A contribution to the mathematical theory of epidemics // Proceedings of the Royal Society A. – 1927. – Vol. 115, No. 772. – P. 700–721.