UDC 511.528.2:514.763.8(045)

Tilepiev M.Sh., Urazmagambetova E.U., Berikhanova G.E., Serimbetov M.A., Dyusembayeva L.K. One of the methods of finding a general solution of the Bernoulli equation

Один из методов нахождения общего решения уравнения Бернулли

Tilepiev Murat Shapenovich,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associateprofessor
Urazmagambetova Eleonora Uzakbayevna,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor
Berikhanova Gulsara Ezhenkhanovna,
Candidate of pedagogical Sciences, Senior Lecturer
Serimbetov Murat Abutalibovich,
Candidate of Technical Sciences, Senior Lecturer
Dyussembayeva Lazzat Kairatovna,
Senior Lecturer, Master of technical science
S.Seifullin Kazakh Agrotechnical University, Astana, Kazakhstan
Тилепиев Мурат Шапенович,
доцент, кандидат физико-математических наук,
Уразмагамбетова Элеонора Узакбаевна,
доцент, кандидат физико-математических наук,
Берикханова Гульсара Еженхановна,
старший преподаватель,кандидат педагогических наук
Серимбетов Мурат Абуталипович,
старший преподаватель,кандидат технических наук
Дюсембаева Лаззат Каиратовна,
старший преподаватель, магистртехнических наук
Казахский агротехнический исследовательский университет им.С.Сейфуллина,
Астана, Казахтан

Abstract. *The solutions to ordinary differential equations have been well studied and published in a large number of publications. However, the question of effective methods for solving ordinary differential equations remains open. This paper explores an alternative method for finding a general solution to Bernoulli's differential equation.*

The solution to Bernoulli's differential equation is well known by dividing y^n *, the entire equation by, contained on the right side of the equation. Then this differential equation is reduced to a linear differential equation and solved in a known way. The solution to Bernoulli's equation can be found in other ways. One such method is presented in this work. In our opinion, the proposed method for finding a general solution to this differential equation is less labor-intensive, and therefore more effective, compared to other methods for solving the Bernoulli equation. This article uses the well-known formula for the derivative of the product of two functions.*

Keywords: *function, derivative, differential equation, general solution, integration.*

Аннотация. *Решение обыкновенных дифференциальных уравнений хорошо изучены и опубликованы в большом количестве изданий. Однако вопрос об эффективных методах решений обыкновенных дифференциальных* *уравнений остается открытым. В настоящей работе исследуется альтернативный метод нахождения общего решения дифференциального уравнения Бернулли. Хорошо известно решение дифференциального уравнения Бернулли делением всего уравнения на y^n, содержащейся в правой части уравнения. Тогда данное дифференциальное уравнение приводится к линейному дифференциальному уравнению и решается известным способом. Решение уравнения Бернулли можно найти и другими способами. Одним из таких способов приводится в данной работе. По нашему мнению, предлагаемый метод нахождения общего решения данного дифференциального уравнения является менее трудозатратным, а следовательно, более эффективным по сравнению с другими методами решения уравнения Бернулли. В данной статье использована известная формула производной произведения двух функций.*

Ключевые слова: *функция, производная, дифференциальное уравнение, сложная функция, общее решение, интегрирование.*

Рецензент: Мартеха Александр Николаевич – кандидат технических наук, доцент. Доцент ФГБОУ ВО «РГАУ-МСХА им. К.А. Тимирязева»

Настоящая статья посвещена нахождению общего решенияуравнения Бернулли,используя формулу производной произведение двух функций.Дифференциальным уравнением первого порядка в виде

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n \tag{1}$$

является уравнением Бернулли [1].

Если $n = 0$, тоуравнение (1) является неоднородным линейным дифференциальным уравнением, а при $n = 1$являетсядифференциальным уравнением разделяющимся переменнами, решения которые являются известными [1].

В настоящей работе рассмотрим общее решениеуравнения Бернулли (1) при $n \neq 0$ и $n \neq 1$.

Умножим обе стороны уравнения (1) на функцию $z = z(x)$

$$y'z + P(x)yz = Q(x)y^n z \tag{2}$$

Функцию $z = z(x)$ выберем так, чтобы выполнялась равенство

$$z' = P(x)z \tag{3}$$

Если поставить равенство (3) в уравнение (2), то имеем

$$y'z + yz' = Q(x)y^n z \tag{4}$$

Если использовать формулу производной произведения двух функций $(uv)' = u'v + uv'$, то уравнение (4) будет равно [2]

$$(yz)' = Q(x)y^n z \tag{5}$$

преобразуяуравнение (5)

$$(yz)' = Q(x)z^{1-n}(yz)^n$$

$$(yz)^{-n}\,(yz)' = Q(x)z^{1-n}$$

$$\frac{\left((yz)^{1-n}\right)'}{1-n} = Q(x)z^{1-n}$$

получим

$$\left((yz)^{1-n}\right)' = (1-n)Q(x)z^{1-n} \tag{6}$$

Теперь найдем функцию $z(x)$. Для этого из (3) получим

$$P(x) = \frac{z'}{z} = (\ln z)'$$

Отсюда

$$\ln z = \int P(x)dx$$

$$z(x) = e^{\int P(x)dx} \tag{7}$$

То поставляя (7) уравнения (6), получим

$$\left(\left(ye^{\int P(x)dx}\right)^{1-n}\right)' = (1-n)Q(x)e^{(1-n)\int P(x)dx}$$

Если интегрировать обе стороны этого равенства, то получим

$$\left(ye^{\int P(x)dx}\right)^{1-n} = C + (1-n)\int Q(x)e^{(1-n)\int P(x)dx}\,dx$$

$$y^{1-n}e^{(1-n)\int P(x)dx} = C + (1-n)\int Q(x)e^{(1-n)\int P(x)dx}\,dx \qquad (8)$$

или, общим интегралом (решением) уравнения (1) является

$$y^{1-n} = e^{-(1-n)\int P(x)dx}\left(C + (1-n)\int Q(x)e^{(1-n)\int P(x)dx}\,dx\right) \qquad (9)$$

Теперь рассмотрим примеры.

Пример1. Найти общее решение уравнения Бернулли [3]

$$y' + \frac{k\,y}{x} = x^m y^n, \quad n \neq 0, n \neq 1,$$

где $k, m, n -$ действительные числи и $n \neq 0, n \neq 1$.

Решение. Умножим обе стороны уравнения на функцию $z = z(x)$

$$y'z + \frac{k\,yz}{x} = x^m y^n z$$

Функцию $z = z(x)$ выберем так, чтобы выполнялась равенство

$$z' = \frac{kz}{x},$$

то

$$y'z + yz' = x^m y^n z$$

Если использовать формулу производной произведения двух функций $(uv)' = u'v + uv'$, то будет равно

$$(yz)' = x^m y^n z$$

$$(yz)' = x^m (yz)^n z^{1-n}$$

$$(yz)^{-n} (yz)' = x^m z^{1-n}$$

$$\left(\frac{(yz)^{1-n}}{1-n}\right)' = x^m z^{1-n}$$

$$\left((yz)^{1-n}\right)' = (1-n) x^m z^{1-n}$$

Теперь найдем функцию $z(x)$

$$\frac{k}{x} = \frac{z'}{z} = (\ln z)'$$

$$\ln z = k \ln x = \ln x^k$$

$$z = x^k$$

То поставляя уравнения получим

$$\left(\left(yx^k\right)^{1-n}\right)' = (1-n) x^m x^{k(1-n)}$$

$$\left(\left(yx^k\right)^{1-n}\right)' = (1-n)x^{m+k(1-n)}$$

Если интегрировать обе стороны этого равенства, то получим

$$\left(yx^k\right)^{1-n} = C + (1-n)\int x^{m+k(1-n)}dx$$

или

$$y^{1-n}x^{(1-n)k} = C + (1-n)\int x^{m+k(1-n)}dx$$

Отсюда

$$y^{1-n} = x^{-(1-n)k}\left(C + (1-n)\int x^{m+k(1-n)}dx\right)$$

1. если $k(1-n)+m \neq -1$, то

$$y^{1-n} = x^{-(1-n)k}\left(C + \frac{(1-n)x^{k(1-n)+m+1}}{k(1-n)+m+1}\right)$$

$$y^{1-n} = x^{-(1-n)k}\left(C + \frac{(1-n)x^{k(1-n)+m+1}}{k(1-n)+m+1}\right)$$

и общим интегралом (решением) уравнения является

$$y^{1-n} = Cx^{-(1-n)k} + \frac{(1-n)x^{m+1}}{k(1-n)+m+1}$$

2. если $k(1-n)+m=-1$, тообщим интегралом (решением) уравнения является

$$y^{1-n}=x^{-(1-n)k}\left(C+(1-n)\ln x\right).$$

Пример 2. Найти общее решение уравнения Бернулли

$$y'+\frac{k\,xy}{x^2+a^2}=xy^n,\quad n\neq 0, n\neq 1,$$

где $k,n-$ действительные числи и $n\neq 0, n\neq 1$.

Решение. Умножим обе стороны уравнения на функцию $z=z(x)$

$$y'z+\frac{k\,xy\,z}{x^2+a^2}=xy^n z$$

Функцию $z=z(x)$ выберем так, чтобы выполнялась равенство [4]

$$\frac{k\,x\,z}{x^2+a^2}=z',$$

то

$$y'z+yz'=xy^n z$$

Если использовать формулу производной произведения двух функций $(uv)'=u'v+uv'$, то будет равно

$$(yz)'=xy^n z$$

$$(yz)' = x(yz)^n z^{1-n}$$

$$(yz)^{-n}(yz)' = x^m z^{1-n}$$

$$\left(\frac{(yz)^{1-n}}{1-n}\right)' = xz^{1-n}$$

$$\left((yz)^{1-n}\right)' = (1-n)x^m z^{1-n}$$

Теперь найдем функцию $z(x)$

$$\frac{k\,x\,z}{x^2+a^2} = \frac{z'}{z} = (\ln z)'$$

$$\ln z = k\int \frac{x\,dx}{x^2+a^2} = \frac{k}{2}\ln\left(x^2+a^2\right) = \ln\left(x^2+a^2\right)^{\frac{k}{2}}$$

$$z(x) = \left(x^2+a^2\right)^{\frac{k}{2}}$$

То поставляя уравнения получим

$$\left(\left(y\left(x^2+a^2\right)^{\frac{k}{2}}\right)^{1-n}\right)' = (1-n)x\left(\left(x^2+a^2\right)^{\frac{k}{2}}\right)^{1-n}$$

$$\left(\left(y\left(x^2+a^2\right)^{\frac{k}{2}}\right)^{1-n}\right)' = (1-n)x\left(\left(x^2+a^2\right)^{\frac{k(1-n)}{2}}\right).$$

Если интегрировать обе стороны этого равенства, то получим

$$\left(y\left(x^2+a^2\right)^{\frac{k}{2}} \right)^{1-n} = C + (1-n)\int x\left(x^2+a^2\right)^{\frac{k(1-n)}{2}} dx$$

или

$$y^{1-n}\left(x^2+a^2\right)^{\frac{k(1-n)}{2}} = C + (1-n)\int x\left(x^2+a^2\right)^{\frac{k(1-n)}{2}} dx$$

Отсюда

$$y^{1-n} = \left(x^2+a^2\right)^{\frac{-k(1-n)}{2}} \left(C + (1-n)\int x\left(x^2+a^2\right)^{\frac{k(1-n)}{2}} dx \right)$$

1. если $k(1-n) \neq -2$, то

$$y^{1-n} = \left(x^2+a^2\right)^{\frac{-k(1-n)}{2}} \left(C + \frac{(1-n)\left(x^2+a^2\right)^{\frac{k(1-n)+2}{2}}}{k(1-n)+2} \right)$$

и общим интегралом (решением) уравнения является

$$y^{1-n} = \left(C\left(x^2+a^2\right)^{\frac{-k(1-n)}{2}} + \frac{(1-n)\left(x^2+a^2\right)}{k(1-n)+2} \right)$$

2. если $k(1-n) = -2$, то общим интегралом (решением) уравнения является

$$y^{1-n} = \left(x^2+a^2\right)\left(C + (1-n)\ln\left(x^2+a^2\right)\right)$$

Пример 3. Найти общее решение уравнения Бернулли

$$y' + k\,xy = xe^{-\frac{kx^2}{2}} y^n,$$

где $k, n -$ действительные числи и $n \neq 0, n \neq 1$.

Решение. Умножим обе стороны уравнения на функцию $z = z(x)$

$$y'z + k\,xy\,z = xe^{-\frac{kx^2}{2}}y^n z$$

Функцию $z = z(x)$ выберем так, чтобы выполнялась равенство [5]

$$k\,x\,z = z'$$

то

$$y'z + yz' = xe^{-\frac{kx^2}{2}}y^n z$$

Если использовать формулу производной произведения двух функций $(uv)' = u'v + uv'$, то будет равно

$$(yz)' = xe^{-\frac{kx^2}{2}}y^n z$$

Теперь найдем функцию $z(x)$

$$k\,x = \frac{z'}{z} = (\ln z)'$$

$$\ln z = k\int x\,dx = \frac{kx^2}{2}$$

$$z(x) = e^{\frac{kx^2}{2}}$$

то поставляя уравнения получим [6]

$$\left(ye^{\frac{kx^2}{2}}\right)' = xe^{-\frac{kx^2}{2}}y^n e^{\frac{kx^2}{2}}$$

$$\left(ye^{\frac{kx^2}{2}}\right)' = xe^{-\frac{knx^2}{2}} e^{\frac{knx^2}{2}} y^n$$

$$\left(ye^{\frac{kx^2}{2}}\right)' = xe^{-\frac{knx^2}{2}} \left(e^{\frac{kx^2}{2}}\right)^n y^n$$

$$\left(ye^{\frac{kx^2}{2}}\right)' = xe^{-\frac{knx^2}{2}} \left(ye^{\frac{kx^2}{2}}\right)^n$$

$$\left(ye^{\frac{kx^2}{2}}\right)^{-n} \left(ye^{\frac{kx^2}{2}}\right)' = xe^{-\frac{knx^2}{2}}$$

$$\frac{1}{1-n}\left(\left(ye^{\frac{kx^2}{2}}\right)^{1-n}\right)' = xe^{-\frac{knx^2}{2}}$$

$$\left(\left(ye^{\frac{kx^2}{2}}\right)^{1-n}\right)' = (1-n)xe^{-\frac{knx^2}{2}}$$

Если интегрировать обе стороны этого равенства, то получим

$$\left(ye^{\frac{kx^2}{2}}\right)^{1-n} = C + (1-n)\int xe^{-\frac{knx^2}{2}} dx$$

$$\left(ye^{\frac{kx^2}{2}}\right)^{1-n} = C - \frac{1-n}{nk} e^{-\frac{knx^2}{2}}$$

$$y^{1-n} e^{\frac{(1-n)kx^2}{2}} = C - \frac{1-n}{nk} e^{-\frac{knx^2}{2}}$$

$$y^{1-n} = e^{\frac{-(1-n)kx^2}{2}} \left(C - \frac{1-n}{nk} e^{-\frac{k\,n\,x^2}{2}} \right)$$

$$y^{1-n} = Ce^{\frac{-(1-n)kx^2}{2}} - \frac{1-n}{nk} e^{-\frac{k\ x^2}{2}}$$

Отсюда получим общий интеграл (решение) уравнения

$$y^{1-n} = \left(Ce^{\frac{nkx^2}{2}} - \frac{1-n}{nk} \right) e^{-\frac{k\ x^2}{2}} \quad .$$

Новый метод предлагаемый в настоящей работе является менее трудозатратным, а следовательно более эффективным по сравнению с классическими методами решения дифференциального уравнения Бернулли.

References

1. Тилепиев М.Ш., Уразмагамбетова Э.У., Сейлова З.Т., Дюсембаева Л.К. Об одном из методов решения линейного дифференциального уравнения первого порядка. The scientific beritage (Budapest,Hungary) №85(85) vol 1 2022, 35-38.

2. Тилепиев М.Ш., Уразмагамбетова Э.У., Берикханова Г.Е., Дюсембаева Л.К. Один из методов нахождения общего решения линейного однородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Материалы XI Международной науч-прак. конф. «Наука и образование в современном мире» (Физико-математические науки/ Юридических лиц в форме ассоциации “Общенациональное движение “Бобек” конгресс учёных Казахстана”. сост.: Е. Ешім. – Астана, 2022. стр.7-10.
3. С.А.Агафонов, А.Д.Герман, Т.В.Муратова. Дифференциальные уравнения. - МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2004.- 348 с.
4. Романко В.К. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчесления. - 2-е изд. - М.: лаборатория Базовых Знаний, 2001 - 344 с: ил.
5. Э. Камке. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнением. Пер. С нем. - 4-е изд., испр. - М.: Наука: Гл. ред. физ.-мат. лит., 1971. - 576 с.
6. Tilepiev M., Urazmagambetova E., Berikhanova G.,Serimbetov M.,Dyusembayeva L. K. On one of themethods for solving the Bernoulli equation. VII International Scientific and Practical Conference «Theoretical and practical perspectives of modern science». April 03-04,2024a. Stockholm, Sweden, 43-46.