UDC 69.04

Garina S. V., Garin M. A. To the solution of the problem of assessing the optimality of the parameters of building structures

К решению проблемы оценки оптимальности параметров строительных конструкций

Garina Svetlana Vladimirovna
Ph.D., Associate Professor, Department of Fundamental Informatics,
Mordovian State University named after N.P. Ogareva
Garin Maxim Alexandrovich
Undergraduate Student, Mordovian State University named after N.P. Ogareva
Гарина Светлана Владимировна
Кандидат технических наук, доцент кафедры фундаментальной информатики,
Мордовский Государственный Университет имени Н.П. Огарева
Гарин Максим Александрович
Студент, Мордовский Государственный Университет имени Н.П. Огарева

Abstract. *The article considers the algorithm of the continuous method for finding the optimal parameters of building structures using the mathematical theory of stability. A search is made for the optimal solution of the objective function when replacing a linear differential system with a nonlinear one in the algorithm.*

Keywords: *Mathematical model, optimization, building construction.*

Аннотация. *В статье рассматривается алгоритм непрерывного метода нахождения оптимальных параметров строительных конструкций с использованием математической теории устойчивости. Приводится поиск оптимального решения целевой функции при замене в алгоритме линейной дифференциальной системы на нелинейную.*

Ключевые слова: *Математическая модель, оптимизация, строительная конструкция.*

При решении инженерных задач в строительстве очень часто приходится сталкиваться с выбором оптимальных решений. Для оценки оптимальности используют различные экономико-математические методы. Под термином «оптимальное решение» понимают наилучшее из всех возможных. Не существует универсальных решений, приемлемых для всех заинтересованных лиц и отвечающих всем требованиям. Оптимальным будем называть решение, если сторонников того или иного решения больше, чем противников, или прибыль от него превышает негативные последствия.

Решение данной проблемы рассматривается многими авторами [1], [2], [3]. Экономико – математические методы используют для минимизации затрат в строительстве, эксплуатацию объектов и ликвидацию аварий на них. При выборе оптимальных решений стараются максимально учесть интересы инвесторов, управленческих структур, проектировщиков, строителей, технологов, ремонтников, многочисленных спецслужб и других организаций. Решения задач зависят от темпов инфляции, процентов за кредит, времени использования объекта, изменение градостроительных планов.

Рассмотрим математическую модель и алгоритм непрерывного метода нахождения оптимальных параметров строительных конструкций с использованием математической теории устойчивости [4]. При этом приведем поиск решения оптимальных параметров целевой функции при замене в алгоритме линейной дифференциальной системы на нелинейную.

Для исследования алгоритма непрерывного метода [4] нахождения оптимальных параметров функции с использованием математической теории устойчивости рассмотрим функцию

$$F(x) = F(x_1, x_2, \dots, x_n), \tag{1}$$

где $F(x)$ – выпуклая функция пространства R^n; $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – n - мерный вектор.

В общем виде целевая функция может быть представлена в виде

$$F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{k} f_j(x_1, \dots, x_n),$$

где $F(x_1, \dots, x_n)$ – целевая функция (стоимость объекта, время строительства и т. д.); $f_j(x_1, \dots, x_n)$ – элемент целевой функции (отдельная конструкция, перекрытие, блок здания и т. д.); x_i – параметры конструкции ($i = 1, \dots, n$).

Согласно алгоритму непрерывного метода, разложим данную функцию в ряд Тейлора в окрестности начальной точки $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, ограничившись членами четвертого порядка. Все описанные действия реализуем в системе Mathcad. Полученное разложение обозначим $h(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Найдём частные производные $\frac{\partial h}{\partial x_1}, \frac{\partial h}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial h}{\partial x_n}$.

Составим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial x_1} = 0, \\ \frac{\partial h}{\partial x_2} = 0, \\ \dots \\ \frac{\partial h}{\partial x_n} = 0, \end{cases} \tag{2}$$

и найдём её решение $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$.

Составим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -\frac{\partial h}{\partial x_1}, \\ \frac{dx_2}{dt} = -\frac{\partial h}{\partial x_2}, \\ \dots \\ \frac{dx_n}{dt} = -\frac{\partial h}{\partial x_n}. \end{cases} \tag{3}$$

Путем замены

$$\begin{cases} x_1 = \bar{x}_1 + x_1^*, \\ x_2 = \bar{x}_2 + x_2^*, \\ \dots \\ x_n = \bar{x}_n + x_n^*. \end{cases}$$

Преобразуем систему к виду

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}_1}{dt} = -\frac{\partial h}{\partial \bar{x}_1}, \\ \frac{d\bar{x}_2}{dt} = -\frac{\partial h}{\partial \bar{x}_2}, \\ \dots \\ \frac{d\bar{x}_n}{dt} = -\frac{\partial h}{\partial \bar{x}_n}. \end{cases} \tag{4}$$

Исследуем на устойчивость систему дифференциальных уравнений (4) в точке $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$. Согласно теории устойчивости по первому приближению [2], асимптотическая устойчивость системы (3) в точке x^* следует из устойчивости системы (4). Для этого произведём линеаризацию системы (4), а именно вычислим матрицу Якоби в точке (0;0;0). Если все собственные значения матрицы удовлетворяют условию $Re\lambda_i < 0$, то по теореме Ляпунова об устойчивости по первому приближению система (4) асимптотически устойчива в точке (0;0;0) [2], следовательно точка $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ является точкой минимума исходной функции (1).

Пример. Рассмотрим целевую функцию

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3 + \frac{1}{x_1 + x_2 + x_3}.$$

За начальную точку примем $x^0 = (1{,}41; 0{,}84; 1)$.

В системе компьютерной математики Mathcad проведем вычисления:

$$\mathrm{ORIGIN} := 1$$

$$\mathrm{j}(x_1, x_2, x_3) := \mathrm{Jacob}\left[\mathrm{FF}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right]$$

$$\mathrm{Jacobian} := \mathrm{j}(0, 0, 0)$$

$$\mathrm{Jacobian} = \begin{pmatrix} -52.864 & -48.701 & -39.497 \\ -48.7 & -178.638 & -72.569 \\ -39.497 & -72.569 & -117.839 \end{pmatrix}$$

Тогда собственные значения матрицы Якоби равны

$$\mathrm{eigenvals}(\mathrm{Jacobian}) = \begin{pmatrix} -247.01 \\ -31.949 \\ -70.382 \end{pmatrix}$$

Собственные значения матрицы Якоби удовлетворяют условию $Re\lambda_i < 0$. Таким образом по теореме Ляпунова об устойчивости по первому приближению система (4) для функции $f(x_1, x_2, x_3)$ асимптотически устойчива в точке (0;0;0) [2]. Следовательно точка $x_1^* = (0{,}988; 0{,}998; 1{,}004)$ является точкой минимума исходной функции $f(x_1, x_2, x_3)$.

При исследовании данной функции, ограничиваясь членами второго порядка в разложении, была получена точка минимума $x_2^* = (0{,}765; 1{,}022; 1{,}028)$. Раскладывая функцию в ряд Тейлора до четвертого порядка, точка минимума равна $x_1^* =$

$(0{,}988; 0{,}998; 1{,}004)$.

Сравнивая значения функции в двух полученных решениях получим

$$f(x_2^*) = f(0{,}765; 1{,}022; 1{,}028) = 4{,}059$$

$$f(x_1^*) = f(0{,}988; 0{,}098; 1{,}004) = 4$$

$$f(x_1^*) < f(x_2^*).$$

Получим вывод: увеличив порядок разложения функции $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ до четвертого порядка, алгоритм непрерывного метода нахождения оптимальных параметров функции с использованием математической теории устойчивости позволяет найти точку минимума с меньшей погрешностью.

References

1. Бобылев Н. А. О функциях Ляпунова и задачах на глобальный экстремум // Автоматика и телемеханика. 1979. №11. С. 5-9.
2. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 472с.
3. Зубов В.И. Теория оптимального управления судном и другими подвижными объектами. – Л.: Судостроение, 1966. 352с.
4. Щенников В.Н., Люпаев Б. М., Гарина С.В. Использование математической модели для оценки оптимальности параметров строительных конструкций // Вестник Мордовского университета. – 2004. - №3-4. – С. 135-140.
5. Потапов Ю.Б., Селяев В.П., Люпаев Б.М. Композиционные строительные конструкции. – М.: Стройиздат, 1984. 100 с.