

НОО "ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ НАУКА"

# ПРОГРЕССИВНЫЕ МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ И ИХ ПРАКТИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ В СОВРЕМЕННЫХ УСЛОВИЯХ

КОЛЛЕКТИВНАЯ МОНОГРАФИЯ

[WWW.SCIPRO.RU](http://WWW.SCIPRO.RU)



**НАУЧНАЯ ОБЩЕСТВЕННАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ  
ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ НАУКА**

**ПРОГРЕССИВНЫЕ МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ  
ОСНОВЫ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ И ИХ  
ПРАКТИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ В  
СОВРЕМЕННЫХ УСЛОВИЯХ**

**КОЛЛЕКТИВНАЯ МОНОГРАФИЯ**

[www.scipro.ru](http://www.scipro.ru)  
Нижний Новгород, 2025

УДК 00  
ББК 1  
П78

**Главный редактор:** Краснова Наталья Александровна – кандидат экономических наук, доцент, руководитель НОО «Профессиональная наука»

**Технический редактор:** Гусева Ю.О.

**Рецензент:**

*Сагитов Рамиль Фаргатович*, кандидат технических наук, доцент, заместитель директора по научной работе в ООО «Научно-исследовательский и проектный институт экологических проблем», г. Оренбург

**Авторы:**

Аветисян Т.В., Авдеева Т.И., Львович И.Я., Львович Я.Е., Преображенский А.П., Преображенский Ю.П., Сухорукова И.В., Чистякова Н.А.

Прогрессивные методологические основы научных исследований и их практическая реализация в современных условиях [Электронный ресурс]: монография. – Эл. изд. - Электрон. текстовые дан. (1 файл pdf: 95 с.). - Нижний Новгород: НОО "Профессиональная наука", 2025. – Режим доступа: [http://scipro.ru/conf/monograph\\_250825.pdf](http://scipro.ru/conf/monograph_250825.pdf). Сист. требования: Adobe Reader; экран 10'.

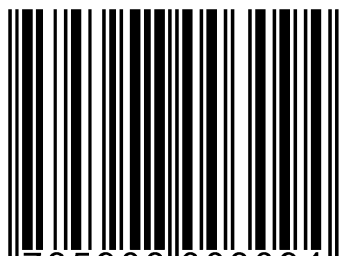
ISBN 978-5-908003-09-4

Материалы монографии будут полезны преподавателям, научным работникам, специалистам предприятий, а также студентам, магистрантам и аспирантам.

При верстке электронной книги использованы материалы с ресурсов: Designed by Freepik, Canva.

ISBN 978-5-908003-09-4

© Авторский коллектив, 2025 г.



9 785908 003094 >

© Издательство НОО Профессиональная наука, 2025 г.

# СОДЕРЖАНИЕ

|                                                                                                    |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Введение .....                                                                                     | 5  |
| Глава 1. Основы поликультурного воспитания в интерактивной среде образовательной организации ..... | 7  |
| Глава 2. Исследование возможностей борьбы с атаками в современных информационных сетях.....        | 19 |
| Глава 3. Вероятностный анализ одномерных случайных величин .....                                   | 46 |
| Заключение.....                                                                                    | 88 |
| Библиографический список.....                                                                      | 89 |
| Сведения об авторах .....                                                                          | 93 |

## Введение

В монографии представлены теоретические подходы и концепции, аналитические обзоры, практические решения в конкретных сферах науки и образования.

Монография состоит из 3-х глав.

В первой главе рассмотрены ключевые аспекты поликультурного воспитания в условиях современной образовательной организации. Представлено понятие поликультурное воспитание, раскрывающее его сущность как целенаправленного процесса формирования у детей представлений о многообразии культур, уважения к ним и готовность к межкультурному взаимодействию. Особое внимание уделено специфике поликультурного воспитания младших школьников учитывая их возрастные особенности восприятия и познавательной деятельности. Центральное место в главе отводится рассмотрению интерактивной среды как эффективному инструменту, способствующему реализации задач поликультурного воспитания. Раскрываются механизмы воздействия интерактивных платформ на когнитивный, эмоционально-оценочный, мотивационно-потребностный и поведенческий компоненты личности младшего школьника в поликультурном контексте. Подчеркивается роль интерактивных технологий в формировании у детей навыков сотрудничества, критического мышления, толерантности и уважения к культурным различиям.

Вторая глава посвящена исследованию методов защиты информационных сетей от DDoS-атак на уровнях L3 и L4 модели OSI. Рассмотрены классификация атак, их механизмы и подходы к выявлению, включая сигнатурный, статистический и поведенческий анализ с применением машинного обучения. Описана разработка программного инструмента на Python с использованием Scapy, Tkinter и Telegram-бота для мониторинга трафика, анализа аномалий и оповещения. Система обеспечивает выявление SYN-Flood и UDP-Flood атак с точностью 98,7–99,9% и устойчива при нагрузке до 3000 пакетов/сек. Решение ориентировано на системных администраторов, предлагая доступный инструмент для защиты сетей. Научная новизна заключается в интеграции поведенческого анализа с интерактивным интерфейсом, а практическая значимость — в адаптивности и простоте использования.

Третья глава содержит основные определения, алгоритмы и формулировки утверждений, примеры, связанные с анализом поведения одномерных случайных величин. Представленные результаты могут использоваться для структурирования знаний и формирования навыков работы с одномерными случайными величинами.

*Авторский коллектив:*

*Глава 1.* Основы поликультурного воспитания в интерактивной среде образовательной организации (Авдеева Т.И.)

*Глава 2.* Исследование возможностей борьбы с атаками в современных информационных сетях (Аветисян Т.В., Преображенский А.П., Преображенский Ю.П., Львович И.Я., Львович Я.Е.)

*Глава 3.* Вероятностный анализ одномерных случайных величин (Сухорукова И.В., Чистякова Н.А.)

## Глава 1. Основы поликультурного воспитания в интерактивной среде образовательной организации

В современное время педагогический процесс ориентирован на повышение уровня результативности, развитие предметных, личностных и метапредметных результатов. Средством осуществления данных условий является применение интерактивной среды, которая формирует познавательные мотивы, позволяет передавать материал в доступной форме, способствует усвоению знаний, активно используется в процессе решения конкретных воспитательных задач, что позволяет качественно реализовывать поликультурное воспитание.

В условиях современного образовательного пространства, когда российские школы все чаще представляют собой многонациональные коллективы, перед системой подготовки педагогов остро встает задача формирования у будущих специалистов компетенций, необходимых для эффективной работы в условиях поликультурной среды. Проблема обучения младших школьников в условиях культурного многообразия является одной из ключевых, требующих осмысления и разработки педагогических культурных подходов. Поликультурное воспитание, выступающее в качестве основы для решения этой задачи, базируется на фундаментальных принципах равноправия всех народов и поддержания их культурного многообразия. Кроме этого, для актуализации личности ребенка необходимо создание условий для познания окружающей действительности, а также восприятия иной культуры. Следовательно, необходимо с детства формировать коммуникативные и когнитивные навыки поликультурного взаимодействия.

Значимость получения знаний о других культурах отражена в Федеральном Государственном образовательном стандарте начального общего образования. Интерактивная среда способствует «созданию условий, реализующих программу духовно-нравственного развития и воспитания обучающихся, направленную на получение таких планируемых результатов, как развитие общей культуры; ознакомление с общечеловеческими ценностями мировой культуры, духовными ценностями отечественной культуры, нравственно-этическими ценностями многонационального народа России и народов других стран»<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Федеральный государственный образовательный стандарт начального общего образования [Электронный ресурс] - URL: <https://fgos.ru/fgos/fgos-noo/> (дата

Мировая педагогика уделяет большое внимание термину поликультурного воспитания, которое, реализуясь через интерактивную среду, включает в себя разнообразные задачи. Для младших школьников организована интерактивная среда, способствующая воспитанию с учетом культурных интересов разных национальных и этнических меньшинств<sup>2</sup>.

Актуальность использования интерактивной среды, в которой происходит поликультурное воспитание младших школьников, обусловленное возрастом обучающихся, максимально подходящий для усвоения морально-культурных ценностей. Кроме этого, в возрасте 7–11 лет активно формируется миропонимание, мышление, характер, установки и стереотипы поведения. Благодаря данным процессам у детей важно развивать уважительное отношение к различным культурам, прививать национальные и общечеловеческие ценности.

Проблеме поликультурного воспитания младших школьников посвятили свои работы многие педагоги, такие как Коджаспирова Г.М., Джурицкий А.Н., Безрукова В.С., Хухлаева, О.В., М.В. Алешина и др.

Интерактивная среда является средством поликультурного воспитания младших школьников. Она выступает важной сопровождающей всех образовательных сред в образовательных организациях. Применение интерактивных технологий в процессе воспитания способствует увеличению эффективности воспитательного процесса обучающихся во всех сферах. Кроме этого, интерактивная среда формирует познавательный интерес младших школьников.

### ***Понятие поликультурное воспитание.***

Анализ научной литературы показывает, что термин поликультурное воспитание интерпретируется достаточно широко. Рассмотрим его различные определения.

В энциклопедическом словаре Безруковой В.С. определение поликультурного воспитания определяется как воспитание «...построенное на идеях подготовки подрастающего поколения к жизни в условиях многонациональной и поликультурной среды»<sup>3</sup>.

Г.М. Коджаспирова поликультурное воспитание трактует, как «учет культурных и воспитательных интересов разных национальных и этнических

---

обращения: 20.08.2025)

<sup>2</sup> Коджаспирова Г.М. Педагогика: учебник для среднего профессионального образования. Москва: Издательство Юрайт, 2019. С. 41.

<sup>3</sup> Безрукова В.С. Основы духовной культуры (энциклопедический словарь педагога). Екатеринбург. 2000. С. 609.

меньшинств»<sup>4</sup>.

Воспитательные интересы и культурные особенности могут рассматриваться в интерактивной среде как средство воспитания, которое формирует совокупность приемов, а также использует предметы материальной и духовной культуры, с помощью которых возникает поликультурное воспитание.

Д.Г. Анохин и И.П. Ильинская в своей статье «Поликультурное образование младших школьников средствами народного искусства» описывают направленность поликультурного воспитания<sup>5</sup>.

В.С. Безрукова в своих работах отмечает важность сотрудничества людей разных культур. Особое внимание уделяется портрету младшего школьника, формированию которого способствует интерактивная среда. Благодаря данной среде мы можем воспитать терпимого, толерантного, имеющего чувство уважения к людям других национальностей и культур ребенка, который готов взаимодействовать с ними и жить в мире и согласии. Безрукова считает, что поликультурность является качеством личности, которое мы формируем благодаря использованию интерактивной среды<sup>6</sup>.

Хухлаева О.В. рассматривает следующие цели поликультурного воспитания

Во-первых, подготовка к сотрудничеству: воспитание для активного и полноценного взаимодействия в современном многонациональном мире через адаптацию и самореализацию личности. Во-вторых, взаимопроникновение культуры: изучение родной культуры через ее взаимодействие с новыми культурами, открытость и терпимость между разными этническими группами. В-третьих, развитие критического мышления: формирование способностей сравнивать и осмысливать ценности разных культур. В-четвертых, предотвращение формирования стереотипов и предрассудков. В-пятых, гармонизация отношений: утверждение данных отношений в коллективе. Наиболее тесное взаимодействие культурных групп происходит при использовании интерактивной среды в процессе воспитания, так как она направлена на

---

<sup>4</sup> Коджаспирова Г.М. Педагогика: учебник для среднего профессионального образования. Москва: Издательство Юрайт, 2019. С. 40.

<sup>5</sup> Анохин Д.Г., Ильинская И.П. Поликультурное образование младших школьников средствами народного искусства // Педагогика. Психология. Социальная работа. Ювенология. Социокинетика. 2015. № 2. С. 149.

<sup>6</sup> Безрукова В.С. Основы духовной культуры (энциклопедический словарь педагога). Екатеринбург. 2000. С. 609.

активное сотрудничество каждого обучающегося<sup>7</sup>.

Поликультурное воспитание направлено на реализацию следующих задач:

1. Адаптация человека к ценностям многонациональных культур.

Данная задача реализуется посредством того, что в интерактивной среде проектная деятельность, основанная на просмотре фильмов, презентаций, театральных постановок, изучении языка, играх разных народов, способствующих развитию детей и формирования у них понимания ценности межнационального взаимодействия.

2. Формирование представлений о взаимодействии представителей различных культур, этносов.

Создается такой воспитательный процесс, в котором важное место занимают технологии интерактивной среды: «мозговой штурм», дискуссии, дебаты, беседы, «круглый стол», анализ конкретных ситуаций, игры и проекты, техника ликвидации тупиковых ситуаций, инсценировки и прочее<sup>8</sup>.

3. Ориентация на диалог культур.

Интерактивная среда создаёт условия для диалога между культурами, содействует самопознанию и взаимообогащению культур.

4. Формирование понимания равноценности культур разных народов и наций.

Понимание культурного многообразия и формирование представлений о различных этносах происходит через практическую и учебную деятельность, в которой значительную роль может играть интерактивная среда<sup>9</sup>.

М.В. Алешина своё внимание уделяет вопросам обозначения задач поликультурного воспитания<sup>10</sup>.

При реализации данных задач в интерактивной среде мы можем способствовать погружению младших школьников в процесс поликультурного воспитания, создать атмосферу, оптимальную для выработки навыков и поликультурной компетентности.

А.Н. Джуринский отмечает значимость интерактивной среды в реализации поликультурного воспитания «...на понимании и уважении иных

---

<sup>7</sup> Хухлаева О.В. Поликультурное образование: учебник для вузов. Москва: Издательство Юрайт, 2021. С. 53–54.

<sup>8</sup> Панфилова А.П. Инновационные педагогические технологии: активное обучение / А.П. Панфилова. – Москва: Издательский центр «Академия», 2009. С. 153.

<sup>9</sup> Коджаспирова Г.М. Педагогика: учебник для среднего профессионального образования. Москва: Издательство Юрайт, 2019. С. 40.

<sup>10</sup> Алешина М. В. Исследовательская деятельность как одна из форм поликультурного образования школьников // Austrian Journal of Humanities and Social Sciences. 2014. № 1. С. 119–120.

народов, культур, цивилизаций, жизненных ценностей, включая культуру быта; осознании необходимости взаимопонимания между людьми и народами; способности общения; соблюдении не только прав, но и обязанностей в отношении иных национальных групп; понимании необходимости межнациональной солидарности и сотрудничества; готовности участвовать в решении проблем другого сообщества и этноса...»<sup>11</sup>.

В интерактивной среде в рамках поликультурного воспитания происходит учет национальных особенностей. Само поликультурное воспитание отрицает возможность формирования личности вне национальной культуры, но при этом оно поддерживает мультиидентичного человека как взаимосвязь различных культур<sup>12</sup>.

***Специфика поликультурного воспитания младших школьников в интерактивной среде.***

Младшими школьниками считают детей возрастом 7-11 лет. Применение интерактивной среды в данном возрасте способствует формированию личности, так как обучающие обладают повышенной впечатлительностью, внушаемостью, произвольностью, внутренним планом действия, самоконтролем и рефлексией. Основой психического развития является формирование произвольности: осознание отношений между окружающими, общественные мотивы поведения, нравственные оценки, значимость конфликтных ситуаций. Это учитывается в поликультурном воспитании, которое позволяет расширять образовательную деятельность, формирует положительное и толерантное отношение младших школьников к другим народам.

Обратимся к средствам внедрения поликультурного воспитания с использованием интерактивной среды в начальную школу, как основе формирования поликультурной компетенции детей младшего школьного возраста.

Поликультурное воспитание по мнению Шевченко А.Н., направленно на призывы личности «способной жить и успешно функционировать в условиях глобализирующегося поликультурного общества»<sup>13</sup>. При этом

<sup>11</sup> Джуринский А. Н. Педагогика межнационального общения: Поликультурное воспитание в России и за рубежом. М.: Сфера, 2007. С. 88.

<sup>12</sup> Джуринский А.Н. Поликультурное образование в многонациональном социуме: учебник и практикум для вузов. Москва: Издательство Юрайт, 2021. С. 132.

<sup>13</sup> Шевченко А.Н. Анализ ключевых понятий поликультурной компетентности в современном образовательном пространстве // Формирование профессиональной компетентности филолога в поликультурной образовательной среде : сб. материалов науч.-практ. конф., 24–25 ноября 2017 г., г.

интерактивная среда помогает обеспечивать развитие поликультурной компетенции. Интерактивная среда позволяет педагогу контролировать образовательный процесс по трём основным направлениям: развитие навыков, применение знаний, оценка результатов деятельности<sup>14</sup>.

Педагог как субъект образовательного процесса, посредством интерактивной среды, индивидуально работает с каждым обучающимся, вовлекая его в учебную деятельность, учитывая его потребности и особенности и формируя самостоятельное мышление.

Длужневская Д.А. в своих работах отмечает, что «принимаются меры, которые в интерактивной среде позволяют экспериментировать и апробировать методические концепции поликультурного воспитания»<sup>15</sup>.

Для осуществления поликультурного воспитания в интерактивной среде, по мнению Шевченко А.Н., общеобразовательные организации должны содержать в учебно-воспитательной работе особое «...наполнение школьных учебников и учебных программ соответствующим содержанием, направленным на формирование у учащихся нравственных, национальных, гражданских ценностей; формирование представлений о разнообразии культур и воспитание уважительного отношения к культурным проявлениям других народов; развитие умений и навыков взаимодействия с их носителями; воспитание в духе мира, толерантности, гуманного межнационального общения»<sup>16</sup>.

Исследователи по данной теме выделяют различные средства, способствующие развитию поликультурной компетенции младших школьников. В первую очередь, для формирования благоприятной поликультурной среды необходимо структурировать учебно-образовательный процесс, включающий во все учебные дисциплины формирование поликультурного развития личности ребенка. Кроме этого, предлагается выстраивание «...ситуаций межэтнического, межрелигиозного, межрегионального взаимодействия, которые

---

Евпатория / ред. кол. И. Б. Каменская, А. И. Каменский, Ю. К. Картавая, М. А. Шалина; под общ. ред. И. Б. Каменской. Симферополь: ИТ «Ариал», 2017. С. 16.

<sup>14</sup> Длужневская Д. А. Методические рекомендации для педагогов начальной школы по реализации поликультурного пространства в образовательном процессе начальной школы // Молодой ученый. 2015. № 7 (87). С. 749. [Электронный ресурс] — URL: <https://moluch.ru/archive/87/16882/> (дата обращения 20.08.2025)

<sup>15</sup> Длужневская Д. А. Методические рекомендации для педагогов начальной школы по реализации поликультурного пространства в образовательном процессе начальной школы // Молодой ученый. 2015. № 7 (87). С. 748–750. [Электронный ресурс] — URL: <https://moluch.ru/archive/87/16882/> (дата обращения 20.08.2025)

<sup>16</sup> Шевченко А.Н. Средства поликультурного образования младших школьников // Вестник Омского государственного университета. Гуманитарные исследования. 2019. с. 145.

способствуют формированию поликультурной компетентности личности»<sup>17</sup>.

Вовк Е.В. в своем исследовании предлагает включать во внеклассную работу различные формы деятельности (например, фестивали национальных культур, конкурсы и др.), которые можно интегрировать в интерактивную среду<sup>18</sup>.

Шевченко А.Н. считает важным в формировании поликультурной компетенции изучение иностранных языков и фольклора. Отмечая, что «устное народное творчество глубоко воздействует на внутренний мир детей, обладает познавательной, воспитательной и культурной ценностями, олицетворяет исторический опыт предыдущих поколений, является одним из важных элементов культуры народа»<sup>19</sup>.

Изучение взаимодействия и взаимопроникновения культурных традиций различных народов способствует образованию и воспитанию школьников в условия поликультурной среды. Иностранный язык, как средство взаимодействия различных народов, способствует поликультурному воспитанию школьников.

К средствам внедрения поликультурного воспитания можно отнести такие интерактивные технологии как мультимедийный материалы. Они могут применяться во всех учебных дисциплинах и внеурочной деятельности. Интерактивная среда активно влияет на формирование познавательной мобильности обучающихся, включает каждого ребенка в образовательный процесс, способствует благоприятной атмосфере, развивает интерес к процессу обучения.

#### ***Интерактивная среда как средство поликультурного воспитания младших школьников.***

Для определения интерактивной среды как средства поликультурного воспитания необходимо выявить значение такого понятия как «средство воспитания». Обратимся к различным педагогическим словарям, авторы которых определяют средства воспитания следующим образом:

Средства воспитания - совокупность приемов, «инструментарий» материальной и духовной культуры, который используется для решения воспитательных задач<sup>20</sup>.

---

<sup>17</sup> Там же

<sup>18</sup> Вовк Е.В. Средства поликультурного образования младших школьников // Universum: психология и образование: электрон. научн. журн. 2018. № 4 (46). [Электронный ресурс] - URL: <https://7universum.com/ru/psy/archive/item/5666> (дата обращения: 20.08.2025)

<sup>19</sup> Шевченко А.Н. Средства поликультурного образования младших школьников // Вестник Омского государственного университета. Гуманитарные исследования. 2019. С. 145.

<sup>20</sup> Новгородцева И. В. Педагогика с методикой преподавания специальных дисциплин: учеб. пособие модульного типа. Москва: ФЛИНТА, 2011. С. 241. [Электронный ресурс] - URL:

Средства воспитания - предметы материальной и духовной культуры, окружающая среда и условия, которые используются для достижения воспитательных целей<sup>21</sup>.

Средством воспитания можно считать то, посредством чего осуществляется воспитательная деятельность; предметы материальной и духовной культуры; окружающая среда и условия, которые используются для достижения воспитательных целей<sup>22</sup>.

Средства воспитания - материальные объекты и предметы духовной культуры, предназначенные для организации и осуществления педагогического процесса и выполняющие функции развития учащихся; предметная поддержка педагогического процесса, а также разнообразная деятельность, в которую включаются воспитанники: труд, игра, учение, общение, познание<sup>23</sup>.

Интерактивная среда – это комплекс уже имеющихся и специально созданных условий, который внешне влияет на обучающихся и формирует их личность.

Само понятие «интерактивность» (от англ. «interaction» – взаимодействие) вошло в педагогику из социологического анализа. Впервые понятие «интерактивная педагогика» было введено в 1975 году немецким ученым Г. Фрицем. По его мнению, предметом интерактивной педагогики был упорядоченный педагогический процесс взаимовлияния и взаимодействия его участников.

Взяв за основу мнение Швецовой И.В. интерактивностью в процессе поликультурного воспитания можно считать: взаимодействие учащихся, их работа в режиме беседы, диалога, общего действия, а педагог выполняет функцию помощника в работе, являясь одним из источников информации<sup>24</sup>.

Применяя интерактивную среду как средство поликультурного воспитания младших школьников, интерактивность можно рассматривать с различных аспектов. С одной стороны, как взаимодействие с помощью телекоммуникаций, интернета и различных средств информационно-

---

<https://znanium.com/catalog/product/454525> (дата обращения 20.08.2025)

<sup>21</sup> Большой тематический словарь по образованию и педагогике / В. М. Полонский. Москва: Народное образование, 2017. С.99.

<sup>22</sup> Хухлаева О.В. Поликультурное образование: учебник для вузов. Москва: Издательство Юрайт, 2021. С. 156.

<sup>23</sup> Коджаспирова Г.М. Педагогический словарь: для студентов высш. и сред. пед. учеб. Заведений. М.: Academia, 2005. С. 91.

<sup>24</sup> Швецова И.В. Интерактивные педагогические технологии в системе дополнительного образования // Труды СПбГИК. 2013. С. 325. [Электронный ресурс] - URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/interaktivnye-pedagogicheskie-tehnologii-v-sisteme-dopolnitelnogo-obrazovaniya> (дата обращения: 20.08.2025)

коммуникационных технологий, а с другой стороны, как коммуникацию обучающихся, педагогов и родителей, т.е. всех субъектов образовательного процесса.

Интерактивные технологии способствует созданию в процессе поликультурного воспитания младших школьников ситуаций успешности детей, интеллектуальную состоятельность, а также направленность на активность всех обучающихся. Целью данного процесса является возможность вовлечь в познавательный процесс каждого обучающегося. В свою очередь, у ученика начальной школы появляется возможность лучше понимать педагога и взаимодействовать с ним, а значит, более точно усваивать материал, необходимый для формирования поликультурных компетенций. Кроме того, каждый ребенок способен вносить собственный вклад в образовательный процесс. Интерактивная среда поликультурного воспитания включает в себя познавательную мобильность, означающую возможность обучающихся обмениваться личным опытом, различными подходами к решению задач как учебных, так и жизненных. В данном контексте познавательной мобильностью является способность обучающихся действовать различными способами в предложенных заданием условиях, нахождение причинно-следственных связей, умение самостоятельно перерабатывать имеющуюся информацию для дальнейшей работы над заданием.

Н.Н. Шевченко описывает интерактивную среду как «системное интегративное образование, которое включает в себя организованную совокупность педагогических условий, интерактивных форм, методов и технологий, обеспечивающих формирование активной позиции во взаимодействии всех субъектов образовательного процесса в направлении их интеллектуального и духовно-нравственного развития, проявления индивидуальности, способностей к партнерскому общению, корпоративной культуры, самостоятельности и креативности в различных видах учебной и внеучебной деятельности»<sup>25</sup>.

Важной частью применения интерактивной среды в поликультурном воспитании младших школьников является ориентация на потребности каждого обучающегося. Кроме того, она должна опираться на имеющиеся информационные ресурсы, а также включать взаимодействие с ребенком

---

<sup>25</sup> Шевченко Н.Н., Шевченко В.И. Организация интерактивной среды вуза как императив современного профессионального образования // КПЖ. 2018. №2 (127). С. 68. [Электронный ресурс] - URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/organizatsiya-interaktivnoy-sredy-vuza-kak-imperativ-sovremennogo-professionalnogo-obrazovaniya> (дата обращения: 20.08.2025)

среду класса и школы.

Для полноценной организации интерактивной среды поликультурного воспитания можно использовать следующие подходы:

1. Когнитивный подход (ориентирован на получение знаний и информации о различных культурах и поликультурных различиях народов);
2. Эмоциональный подход (ориентирован на установление поликультурного взаимодействия, чувства младших школьников по отношению к другим этносам);
3. Поведенческий подход (повышает эффективность общения, через формирования соответствующих знаний и умений).

Выделенные подходы обеспечивают развитие поликультурной компетенции.

Рассмотрим, как интерактивные платформы могут быть применены для развития различных элементов поликультурной компетентности:

- когнитивный компонент, представляющий собой совокупность знаний о поликультурном взаимодействии, а также об истории и культуре как своего, так и других народов. Возможно использовать следующие интерактивные платформы: Президент России - гражданам школьного возраста <http://kids.kremlin.ru/> (пример задания: изучите разделы «Государственные символы» и «История России». После ознакомления с информацией предложите детям создать короткую презентацию или коллаж, демонстрируя, какие персонажи и исторические события отражают многонациональный характер России), Глобальная школьная лаборатория <https://globallab.org/ru/> - .YmxfnO3P3IU (пример задания: Участие в проекте «Культурное многообразие мира», где дети могут изучать традиции, фольклор, национальную кухню и языки разных народов, делясь своими находками и создавая интерактивные культурные карты);
- эмоционально-оценочный компонент, как отношения к своему народу и другим национальным группам. Возможно использовать следующую интерактивную платформу: Школа финансовой грамотности и гибких навыков для детей и подростков <https://bosskids.ru/> (пример адаптивного задания: создать «Банк добрых дел» или «Копилку культуры», где дети могут описывать (в виде текстов, рисунков или видео) пример своего уважительного отношения к представителям других культур, учиться эмпатии);
- мотивационно-потребностный компонент, как сформированность мотивации и потребности в освоении родной и иных культур. Возможно использовать интерактивную платформу: Глобальная

школьная лаборатория <https://globallab.org/ru/> - .YmxfNO3P3IU (пример задания: участие в международных проектах «Виртуальное путешествие по разным странам», где дети из разных стран общаются, изучают свою географию, историю, традиции, слушают музыку, смотрят фильмы о культуре и делятся этой информацией с другими ребятами, а также совместно работают над решением задач, связанных с различными аспектами изучения культуры);

- поведенческий компонент, как действия и поступки по отношению к людям других национальностей. Возможно использовать интерактивную платформу: Глобальная школьная лаборатория <https://globallab.org/ru/> - .YmxfNO3P3IU (пример задания: в рамках ролевых игр или симуляций предложите детям проиграть ситуации, где им необходимо взаимодействовать с представителями других культур, решая совместные задачи. Например, «Создаем мир без границ», «Кодекс поведения в поликультурном классе»).

Для организации поликультурного воспитания в интерактивной среде для младших школьников можно использовать образовательные платформы, которые позволяют самостоятельно создавать интерактивные задания для обучающихся:

<https://learningapps.org/> : прекрасно подходит для создания викторин, парных заданий (например, «Сопоставь флаг страны с её названием», «Сопоставь национальный костюм с народом», «Сопоставь изображение национальных блюд с названием страны»);

<https://www.quizshow.io/> : создаются интерактивные задания в формате игрового шоу, например «Путешествие по миру» с вопросами о традициях, географии, известных личностях разных народов;

<https://kvestodel.ru/> : подходит для создания образовательных квестов с учетом возраста детей, где, решая задачи, связанные с разными культурами, продвигаются по сюжету. Например, квест «Загадки народов мира»;

<https://onlinetestpad.com/> : создание тестов, опросов, игр и даже сайтов. Например, опрос «Что вы знаете о странах, которые населяют наши соседи?»;

<https://joyteka.com/ru> : создание разнообразных игр. Например, игра «Дружба народов», рассказывающая о дружбе разных национальностей.

### **Заключение.**

Проведен анализ психолого-педагогической литературы, посвященный вопросам поликультурного воспитания младших школьников в интерактивной среде. Выделено четыре компонента, которые необходимо

учитывать при организации поликультурного воспитания: когнитивный, эмоционально-оценочный, мотивационно-потребностный, поведенческий. Важным аспектом является осознание инноваций интерактивной среды в поликультурном воспитании. Современные интерактивные платформы, представляют уникальные возможности для создания увлекательной, доступной и интересной среды, способствующей эффективному формированию компонентов поликультурного взаимодействия.

## Глава 2. Исследование возможностей борьбы с атаками в современных информационных сетях

В условиях стремительного развития цифровых технологий информационные сети стали неотъемлемой частью жизнедеятельности как государственных, так и частных организаций. Электронные взаимодействия, дистанционная работа, передача критически важных данных и предоставление онлайн-сервисов — всё это делает информационные ресурсы крайне уязвимыми перед множеством угроз, среди которых особое место занимают кибератаки.

Одной из наиболее опасных и деструктивных форм кибератак являются распределённые атаки типа DDoS (Distributed Denial of Service). Целью таких атак является создание перегрузки сетевой инфраструктуры жертвы путём массовой генерации вредоносного трафика с множества источников. В отличие от классических атак, DDoS имеет распределённый характер и часто осуществляется с использованием ботнетов — сетей заражённых устройств, управляемых удалённо злоумышленником. Особую угрозу представляют атаки на сетевом (L3) и транспортном (L4) уровнях модели OSI, поскольку они могут быть крайне эффективны при минимальных вычислительных затратах со стороны атакующего и при этом сложны для обнаружения стандартными средствами.

В последние годы наблюдается увеличение числа DDoS-атак на государственные порталы, онлайн-сервисы, финансовые учреждения и образовательные учреждения. Это подтверждает необходимость совершенствования механизмов защиты, в том числе разработки новых инструментов для раннего выявления и реагирования на потенциальные угрозы, до того, как атака начнёт влиять на доступность сервиса.

Актуальность темы данной работы обусловлена необходимостью повышения защищённости информационных сетей, особенно в условиях ограниченного бюджета и отсутствия профессионального оборудования у малых организаций или частных пользователей. Существующие решения в сфере защиты от DDoS-атак зачастую являются коммерческими, дорогостоящими и сложными в настройке.

Целью данной работы является разработка подходов для мониторинга DDoS-атак, выявления их признаков на уровнях L3 и L4, а также реализации системы оповещения администратора при обнаружении подозрительной активности.

Для достижения поставленной цели в ходе исследования решаются следующие задачи:

- Проведение анализа теоретических основ DDoS-атак, их классификация по уровням модели OSI;
- Исследование современных подходов к обнаружению DDoS-атак;
- Изучение методов перехвата и анализа сетевого трафика на программном уровне с использованием Python и библиотеки Scapy;
- Проектирование архитектуры программного средства, включающей модуль захвата трафика, блок анализа, систему визуализации данных и модуль уведомлений;
- Реализация алгоритмов определения аномалий на основе анализа частоты пакетов, количества уникальных IP-адресов, распределения TTL и размера пакетов;
- Интеграция Telegram-бота для автоматической отправки уведомлений пользователю при выявлении признаков возможной атаки.

Научная новизна работы заключается в интеграции поведенческого анализа сетевого трафика с пользовательским интерфейсом, позволяющим не только наблюдать за текущей сетевой активностью, но и своевременно реагировать на потенциальные угрозы.

Практическая значимость заключается в разработке доступного и понятного программного инструмента, ориентированного на системных администраторов, инженеров по информационной безопасности и технических специалистов, не обладающих глубокими знаниями в области кибербезопасности. Программа может быть адаптирована под различные конфигурации и использоваться как самостоятельное средство наблюдения за трафиком.

## 1. АНАЛИЗ ХАРАКТЕРИСТИК БЕЗОПАСНОСТИ ИНФОРМАЦИОННЫХ СЕТЕЙ

В условиях постоянного роста информационных технологий и массового распространения сетевых инфраструктур, защита информации становится важнейшим элементом стабильного функционирования любых организаций и частных пользователей. Угрозы безопасности информационных сетей являются многогранными и могут быть разнообразными, охватывая как внешние, так и внутренние факторы<sup>26</sup>. Для создания эффективных

---

<sup>26</sup> Горячева Н.Ю. Информационная безопасность компьютерных систем. — М.: Академия, 2021. — 272 с. — С. 132–148

систем защиты необходимо понимать, какие именно угрозы могут возникнуть в информационных системах и как они могут воздействовать на их безопасность<sup>27</sup>.

Внешние угрозы (от атакующих без легитимного доступа, актуальны в открытых сетях, таких как интернет):

1. DDoS-атаки.
2. SQL-инъекции.
3. Межсайтовые скрипты (XSS).
4. Фишинг.

Внутренние угрозы (от сотрудников или доверенных пользователей, могут быть случайными или преднамеренными):

1. Неосторожность сотрудников.
2. Вредоносные действия сотрудников.
3. Социальная инженерия.

Уязвимости сетевых устройств и протоколов:

1. Ошибки конфигурации сетевых устройств.
2. Уязвимости в протоколах безопасности.

Подходы к защите:

1. Мониторинг и анализ трафика.
2. Шифрование и аутентификация.
3. Обучение сотрудников.

Комплексная защита требует постоянного мониторинга угроз и уязвимостей, а также адаптации к новым вызовам.

Классификация DDoS-атак по механизму воздействия<sup>28</sup>:

- По типу пакетов:
  - ACK/RST-flood (поддельные подтверждения).
  - PUSH-flood (перегрузка буферов данных).
  - FIN-flood (имитация завершения соединений).
- По цели воздействия:
  - Исчерпание процессорных ресурсов.
  - Переполнение буферов сетевых интерфейсов.
  - Блокировка легитимных соединений.

<sup>27</sup> Плотников А.А., Жилейко А.А., Любавская П.А., Амирасланов А.А. О Проблемах анализа характеристик беспроводных сетей // В сборнике: Актуальные проблемы инновационных систем информатизации и безопасности. Материалы международной научно-практической конференции. Воронеж, 2025. С. 179-181.

<sup>28</sup> Климов С.Е. Основы противодействия DDoS-атакам. — СПб.: БХВ-Петербург, 2021. — 318 с. — С. 59–61.

Превентивные методы защиты:

1. Архитектурная устойчивость.
2. Сегментация и изоляция сетей.
3. Аутентификация и фильтрация на уровне приложений.
4. Настройка правил на межсетевых экранах и маршрутизаторах.
5. Мониторинг и раннее предупреждение.

Реактивные методы защиты при начавшейся атаке<sup>29</sup>:

- Локализация угрозы и минимизация последствий.
- Масштабирование ресурсов (увеличение серверов, облачных инстансов, распределение нагрузки).
- Фильтрация трафика.

Масштабирование ресурсов смягчает последствия атак, обеспечивая непрерывность работы сервисов и снижая вероятность отказа системы.

## 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ВЫЯВЛЕНИЯ DDOS-АТАК

### 2.1. Постановка задачи выявления DDoS-атак

Ключевыми требованиями к системе детектирования являются:

1. Своевременность обнаружения.
2. Высокая точность.
3. Универсальность и адаптивность.
4. Масштабируемость и ресурсная экономность.
5. Прозрачность и настраиваемость.

На основании вышеперечисленных требований формализуем задачу следующим образом. Пусть во временном окне  $\Delta t$  фиксируются следующие переменные  $f(x)=(x_1, x_2, \dots, x_m)$  где:

$x_1 = \frac{N_{pkt}}{\Delta t}$  – число всех пакетов, прошедших через монитор (единиц/секунда);

$x_2 = \frac{B_{byte}}{\Delta t}$  – общий объём трафика (байт/секунда);

$x_3 = \frac{N_{syn}}{\Delta t}$  – число TCP-SYN-пакетов;

$x_4 = \frac{H_{port}}{\Delta t}$  – энтропия распределения портов;

---

<sup>29</sup> Акулов Н.А., Анисимов В.О., Анохин Н.А., Борисович А.И. Об анализе некоторых характеристик современных компьютерных сетей // В сборнике: Актуальные проблемы инновационных систем информатизации и безопасности. Материалы международной научно-практической конференции. Воронеж, 2025. С. 16-18.

....

$x_m$  - иные признаки (длительность TCP-сессий, доля пакетов с конкретными флагами и т. д.).

Требуется построить детектор  $D(x)$ , который возвращает метку

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если в окне } \Delta t \text{ обнаружена DDoS – атака,} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (1)$$

В простейшем сигнатурно-пороговом случае

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \exists j: x_j \geq T_j, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (2)$$

где  $T_j$  – порог, задающий допустимый уровень признака  $x_j$  (например,  $T_3$  – максимально допустимое число SYN-пакетов в секунду в норме). Однако чисто пороговые схемы не гарантируют устойчивость к «сглаженным» атакам, когда злоумышленник старается держать повышенный объем трафика ниже порога.

Поэтому более сложная постановка формулируется как задача машинного обучения. Вводится функция потерь  $L$  (например, кросс-энтропийная  $H(y, \hat{y})$ , и модель  $f(x; \theta)$  (логистическая регрессия, SVM, дерево решений, нейронная сеть), параметризованная вектором  $\theta$ . Обучение модели состоит в оптимизации:

$$D(x) = \arg \min \sum_{i=1}^N L(y^{(i)}, f(x^{(i)}; \theta)) + R(\theta), \quad (3)$$

где  $\{(x^{(1)}, y^{(1)}), (x^{(2)}, y^{(2)}), \dots, (x^{(N)}, y^{(N)})\}$  – обучающая выборка,  $y^{(i)} \in \{0, 1\}$  указывают, был ли в примере DDoS-трафик, а  $R(\theta)$  – регуляризатор.

$$D(x) = \begin{cases} 1, & (x; \theta^*) \geq T, \\ 0, & (x; \theta^*) < T, \end{cases} \quad (4)$$

где  $T$  – уровень порога, выбранный на основании желаемого баланса ложных срабатываний (FP) и пропущенных атак (FN)

Таким образом, постановка задачи включает следующие компоненты:

- Определение набора признаков  $x_j$ , наиболее информативных для разделения «нормального» и «атакующего» трафика.
- Выбор методики анализа (сигнатурная, статистическая, поведенческая/ML или гибридная) и формата датасета (пакетные логи, flow-записи и т. п.),
- Определение целевой функции  $D(x)$  и критерия качества,
- Постановка требования по задержке  $\Delta t$  и по ресурсам (максимально допустимая вычислительная нагрузка при анализе каждого окна),
- Настройка пороговых значений  $T_j$  (в случае порогового детектора), либо архитектуры и гиперпараметров модели  $f(x; \theta)$  (в случае ML-

решения).

## 2.2. Выбор признаков и критериев детектирования

В процессе построения системы выявления DDoS-атак ключевым шагом является корректный выбор набора признаков, отражающих различия между «нормальным» и «атакующим» трафиком. От качества и информативности признаков напрямую зависят точность и надёжность детектирования. В литературе выделяют несколько групп признаков<sup>30,31</sup>: базовые метрики трафика, статистические характеристики и энтропийные показатели. В данном разделе рассмотрим две основные группы:

- Базовые метрики трафика,
- Энтропийные и статистические показатели.

### 2.2.1. Базовые метрики трафика

Базовые трафиковые метрики служат фундаментом для первичного анализа сетевой активности. Они напрямую отражают энергичность сетевого потока и чаще всего используются в системах раннего предупреждения об объёмных DDoS-атаках. Ниже приведены основные из них:

Количество пакетов  $N_{pkt}$

Определяется как число IP-пакетов, которые пересекли сетевой интерфейс за фиксированный временной интервал  $\Delta t$ . Формально:

$$N_{pkt}(\Delta t) = \sum_{i=1}^n 1_{[T_0, T_0 + \Delta t]}(t_i), \quad (5)$$

и  $t_i$  - время прихода  $i$ -го пакета,  $n$  – общее число пакетов в окне  $\Delta t$ .

При нормальных условиях  $N_{pkt}$  колеблется вокруг некоторого среднего  $\mu_{pkt}$  с типичным стандартным отклонением  $\sigma_{pkt}$ . Во время DDoS-атаки параметр  $N_{pkt}$  резко возрастает и может превышать  $\mu_{pkt} + k\sigma_{pkt}$ , где  $k$  — коэффициент порога (обычно  $k = 3 \dots 5$ )

Объём трафика  $B_{byte}$ . Представляет собой суммарный объём переданных байт за интервал  $\Delta t$ .

$$B_{byte}(\Delta t) = \sum_{i=1}^n s_i, \quad s_i = \text{размер } i\text{-го пакета (байт)} \quad (6)$$

Где суммируются все пакеты, зафиксированные монитором в  $[T_0, T_0 + \Delta t]$ . В норме объём трафика  $B_{byte}$  подчиняется сезонным колебаниям и

<sup>30</sup> Абрамов В.Ю. Методы анализа аномалий в компьютерных сетях. — М.: РГУ нефти и газа, 2020. — 218 с. — С. 77–79.

<sup>31</sup> Behal S., Kumar K., Sachdeva M. DDoS Attack Detection and Mitigation Using Machine Learning Techniques: A Review // Computer Networks. — 2021. — Vol. 187. — P. 71–72.

характеризуется распределением с некоторой дисперсией  $\sigma_{byte}^2$ . При объёмных DDoS-атаках (UDP-, TCP-флуд) наблюдается внезапный «пик»  $B_{byte} \gg \mu_{byte} + k\sigma_{byte}$ , что служит одним из первичных индикаторов атаки.

Скорость трафика – пакетов в секунду (pps) и байт в секунду (bps).

На практике нередко используют производные показатели «скорость»:

$$R_{pkt} = \frac{N_{pkt}(\Delta t)}{\Delta t}, \quad R_{byte} = \frac{B_{byte}(\Delta t)}{\Delta t} \quad (7)$$

Внезапное возрастание  $R_{pkt}$  (пакетов/с) или  $R_{byte}$  (байт/с) за короткое окно говорит о начале объёмной атаки. Такой подход применим в системах с высокочастотным мониторингом – например, когда  $\Delta t = 1$  с или  $\Delta t = 0,5$  с

Доля пакетов определённого типа. SYN-Flood-атаки доля TCP-пакетов с установленным флагом SYN (без последующего завершения рукопожатия) резко возрастает. Формализуем количество SYN-пакетов:

$$N_{SYN}(\Delta t) = \sum_{i=1}^n 1 \{ \text{флаг SYN в } i - \text{м пакете} \} \quad (8)$$

Тогда доля SYN-пакетов:

$$\alpha_{SYN} = \frac{N_{SYN}(\Delta t)}{N_{pkt}(\Delta t)} \quad (9)$$

В норме  $\alpha_{SYN} \approx 0,01 \dots 0,05$  (зависит от характера приложений), а во время SYN-Flood может приближаться к 0,5 ... 0,9 или даже 1.

Аналогично, доля UDP-пакетов:

$$\alpha_{UDP} = \frac{N_{UDP}(\Delta t)}{N_{pkt}(\Delta t)} \quad (10)$$

Количество новых TCP-соединений.

Другой признак являет собой число установленных TCP-соединений за  $\Delta t$ . Каждый раз, когда фиксируется полная процедура установления TCP-соединения (SYN, SYN-ACK, ACK), система увеличивает счётчик:

$$N_{conn}(\Delta t) \quad (11)$$

При TCP-SYN-Flood злоумышленник может отправлять SYN без прохождения полного рукопожатия, однако сервер будет выделять ресурсы. Если число полуоткрытых соединений превышает порог  $T_{halfopen}$ , это выявляется как признак атаки.

Средний размер пакета  $\bar{s}$ .

Рассчитывается как

$$\bar{s} = \frac{1}{N_{pkt}} \sum_{i=1}^n s_i \quad (12)$$

Во время UDP-Flood и ICMP-Flood пакеты имеют единообразные размеры (например, 512 или 1024 байта), что приводит к низкой вариативности

$\bar{s}$  и низкому  $\sigma_s$ . В норме размеры пакетов более разнообразны.

Суммарно, базовые трафиковые метрики представляют собой вектор  $x_{base} \in R^k$ , где  $k$  - число выбранных метрик (обычно  $k = 5 \dots 10$ ). Простейшая система детектирования может задавать пороговые правила вида:  $R_{pkt}(\Delta t) > T_{pkt}, R_{byte}(\Delta t) > T_{byte}, \alpha_{SYN} > T_{SYN}, \alpha_{UDP} > T_{UDP}, N_{conn}(\Delta t) > T_{conn}$ , и если хотя бы одно условие выполняется, генерируется тревожный сигнал.

Однако чисто пороговые методы часто уязвимы к «сглаженным» атакам, когда злоумышленник держит  $R_{pkt}$  или  $\alpha_{SYN}$  чуть ниже порога. В таких случаях «базовых» метрик может быть недостаточно, и требуется статистический или поведенческий анализ, включающих более сложные признаки.

### 2.2.2. Энтропийные и статистические показатели

Энтропийные и статистические показатели помогают отличать нормальный трафик от атак, включая низкоскоростные и многовекторные.

Энтропия Шеннона распределения IP-адресов источников отражает степень «непредсказуемости» распределения. Для DDoS-детектирования анализируется распределение IP-адресов источников за временное окно  $\Delta t$ . Пусть  $\{p_i\}$  – вероятности появления каждого  $i$ -го IP-адреса среди  $N_{pkt}$  пакетов. Энтропия вычисляется как:

$$H_{IP} = -\sum_{i=1}^M p_i \log_2 p_i \quad (13)$$

где  $M$  - число уникальных IP-адресов источников за  $\Delta t$ , а

$$p_i = \frac{n_i}{N_{pkt}} \quad (14)$$

где  $n_i$  – число пакетов от  $i$ -го IP.

В нормальном режиме распределение IP-источников разреженное, энтропия  $H_{IP}$  находится в диапазоне 2,5–6,0 бит в зависимости от объёма сети. При объёмных DDoS-атаках используется один бот-мастер или ботнет с ограниченным пулом IP, что сжимает распределение, увеличивает долю пакетов от атакующего IP и снижает  $H_{IP}$  до 0,2–1,5 бит. Спад энтропии указывает на атаку.

Иногда вместо энтропии Шеннона вычисляют энтропию распределения портов  $H_{port}$ , что позволяет выявить аномалии, связанные с однотипными портовыми обращениями.

Энтропия распределения размеров пакетов служит дополнительным признаком атаки:

$$H_{size} = -\sum_{i=1}^K q_i \log_2 q_i \quad (15)$$

где  $q_i$  – доля пакетов размером  $s_i$ ,  $K$  - число различных размеров. При DDoS-

атаке с фиксированным размером пакета (например, 512 или 1024 байта) энтропия  $H_{size}$  снижается до  $\sim 0$ . В норме распределение размеров пакетов разнообразно,  $H_{size}$  составляет 2,5 – 4,0 бит.

Дисперсия и стандартное отклонение применяются к признакам объёма, частоты запросов и интервалов между пакетами.

Дисперсия признака  $X$  в интервале  $\Delta t$ :

$$Var(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_X)^2, \mu_X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (16)$$

Стандартное отклонение:

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)} \quad (17)$$

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$$

Например, при нормальном сетевом обмене интервалы между пакетами ( $IAT_i = t_i - t_{i-1}$ ) распределены относительно непредсказуемо и  $\sigma_{IAT}$  высок. Во время DDoS-атаки, особенно «флудового» типа, интервалы между пакетами уменьшаются и становятся практически равномерными. Это приводит к снижению  $\sigma_{IAT}$ . Таким образом, при анализе IAT используют пороговые проверки:  $\sigma_{IAT} < T_\sigma, \mu_{IAT} < T_\mu$ , где  $T_\sigma$  и  $T_\mu$  настраиваются на нормальный сетевой трафик.

Корреляция между признаками. Рассмотрим пару признаков  $X$  и  $Y$ . Коэффициент корреляции Пирсона:

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}, Cov(X,Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_X)(Y_i - \mu_Y) \quad (18)$$

В норме корреляция между объёмом трафика  $B_{byte}$  и числом пакетов  $N_{pkt}$  высока, потому что оба растут вместе при увеличении активности. При аномальной активности, связь между  $B_{byte}$  и  $N_{pkt}$  может быть слабее: при большом  $N_{pkt}$  объём  $B_{byte}$  остаётся относительно небольшим. Таким образом, ниже определённый порог  $\rho_{B,N} < T_\rho$  может служить признаком DDoS-атаки.

Коэффициент вариации – это безразмерная характеристика относительной рассеянности:

$$CV = \frac{\sigma_X}{\mu_X} \quad (19)$$

При анализе размера пакетов  $CV_{size}$  позволяет дифференцировать «флудовые» атаки (где  $CV_{size} \approx 0$ , все пакеты почти одинаковы) и нормальный трафик ( $CV_{size} > 0,3$ ). Аналогично, коэффициент вариации IAT (низкий  $CV_{IAT}$ ).

Иногда для усиления детекции применяют составные метрики – линейные или нелинейные комбинации базовых и статистических признаков. Например:

$$D_{score} = w_1 \frac{N_{pkt} - \mu_{pkt}}{\sigma_{pkt}} + w_2 (\mu_{IAT} - \mu_{IAT}^{norm}) / \sigma_{IAT}^{norm} - w_3 H_{IP}, \quad (20)$$

где  $w_i$  – весовые коэффициенты, подобранные экспериментально. Если  $D_{score} > T_{global}$ , генерируется сигнал тревоги. Такой подход, совмещающий пороги для разных метрик, повышает устойчивость к вариативным атакам

### 2.2.3. Основные признаки атак уровней L3–L4

Атаки сетевого и транспортного уровней (L3–L4) направлены на истощение ресурсов устройств или хостов массовой генерацией пакетов. Классические примеры: ICMP-флуд, UDP-флуд, TCP-SYN-флуд. Признаки атак основаны на IP- и TCP/UDP-параметрах.

TCP-SYN-Flood:

- При TCP-SYN-флуде атакующий отправляет множество SYN-пакетов без завершения рукопожатия (SYN → SYN-ACK → ACK), что увеличивает долю  $\alpha_{SYN}$  (9).
- Сервер выделяет ресурсы (TCB) для SYN-пакетов. Если число полуоткрытых соединений  $H$  превышает порог  $T_H$ , это указывает на DDoS. В норме  $H$  — десятки, при атаке — тысячи и более.
- Полуоткрытые соединения в состоянии SYN\_RECEIVED имеют среднее время существования  $\overline{T_{halfopen}}$ , в норме близкое к ( $\tau_{TCP}$ ), при атаке резко возрастающее.
- При атаке возможен рост доли RST- и FIN-пакетов для маскировки, в норме их доля мала.

Таким образом, для TCP-SYN-флуда ключевыми признаками являются:

- $\alpha_{SYN}$  – доля SYN-пакетов среди TCP ( $\alpha_{SYN} \gg \mu_\alpha$ ),
- $H$  – число полуоткрытых соединений (значительно выше  $T_H$ ),
- $\overline{T_{halfopen}}$  – среднее время существования полуоткрытых соединений (превышает  $\tau_{TCP}$ ).

UDP-Flood:

- При UDP-флуде  $\alpha_{UDP}$  (9) резко возрастает.
- Атакующий использует однотипные пакеты, в отличие от нормального трафика с широким разбросом размеров. Поэтому при анализе статистики размеров можно наблюдать:

$$\sigma_{size,UDP} \ll \sigma_{size,normal}, CV_{size} \ll 1.$$

Если  $CV_{size} < 0,05$ , это с высокой вероятностью означает UDP-флуд.

- Увеличение скорости UDP-потока

$$R_{pkt,UDP} = \frac{N_{UDP}}{\Delta t}, \quad R_{byte,UDP} = \frac{B_{byte,UDP}}{\Delta t} \quad (21)$$

В норме  $R_{pkt,UDP}$  — сотни пакетов/с, при атаке — тысячи или десятки тысяч пакетов/с.

- Снижение энтропии IP-источников. Ботнет использует ограниченный набор IP-адресов (например, 10 машин), и  $H_{IP,UDP}$  резко падает. В норме DNS-клиенты распределены более разреженно

Для UDP-флуда ботнет-активность сконцентрирована на фиксированном наборе ключевых IP-адресов (например, злоумышленник может использовать всего 10 машин), и энтропия  $H_{IP,UDP}$  резко падает. В норме DNS-клиенты распределены более разреженно.

Таким образом, для UDP-флуда специфичными признаками являются:

- $\alpha_{UDP} \gg \mu_{\alpha_{UDP}}$ ,
- узкая дисперсия размеров UDP-пакетов ( $CV_{size} \approx 0$ ),
- высокий  $R_{pkt,UDP}$ ,
- сниженная энтропия распределения IP-источников  $H_{IP,UDP}$ .

ICMP-Flood:

- В норме  $\alpha_{ICMP} \approx 0,005$  при атаке возрастает до 0.7–0.9.
- В норме  $R_{pkt,ICMP} \approx 5 \dots 50$  пакетов/с, при атаке — сотни или тысячи пакетов/с.
- ICMP-пакеты имеют длину 64 или 128 байт,  $CV_{size,ICMP}$  низкий,  $\overline{s_{ICMP}}$  близок к константе.
- При отражённых атаках  $H_{IP,ICMP}$  может быть высокой из-за множества IP-источников, но доля «неправильных» Echo Reply растёт, снижая энтропию совместного распределения «IP-источник → IP-назначение».

### 2.3. Разработка методики классификации аномалий

Методика классификации аномалий строит модель, определяющую по признакам трафика норму или атаку, используя машинное обучение. Процесс включает: предварительную обработку данных (очистка, нормализация), отбор признаков (PCA, жадные или эвристические алгоритмы), разбиение выборки на обучающую и тестовую, обучение классификаторов и

оценку их точности<sup>32</sup>.

Для классификации DDoS применяют обучение с учителем на размеченных наборах трафика. Эффективны алгоритмы SVM, логистическая регрессия, деревья решений и ансамбли (Random Forest, XGBoost), показывающие точность 98–99% на датасетах (например, CICIDS2017)<sup>33</sup>. Глубокие нейронные сети (LSTM, CNN) используются при больших объёмах данных и учёте временных зависимостей.

Оценка качества модели включает метрики:

- Точность (accuracy) — доля правильно классифицированных образцов.
- Точность положительного прогноза (precision) и полнота (recall) — для оценки распознавания атак и ложных тревог.
- F1-мера — гармоническое среднее precision и recall.

Эти метрики вычисляются по формулам:

$$Precision = \frac{TP}{TP+FP}, Recall = \frac{TP}{TP+FN}, F_1 = \frac{2Precision \times Recall}{Precision+Recall} \quad (25)$$

где  $TP$  - число правильно обнаруженных атак,  $FP$  - ложных срабатываний,  $FN$  - пропущенных атак.  $ROC-AUC$  и  $PRC-AUC$  оценивают стабильность модели при разных порогах. Перекрестная проверка на исторических данных отслеживает *Accuracy*, *Precision*, *Recall* и  $F_1$ .

При отсутствии размеченных данных используют анализ аномалий без учителя (кластеризация, метод ближайших соседей), обучая модель на нормальном трафике для выявления отклонений по признакам: число пакетов, число бит, энтропия IP-адресов и портов<sup>34</sup>. Гибридные схемы сочетают сигнатурный/статистический фильтр с ML-анализом.

Методика классификации:

1. Обучение модели на нормальном и атакующем трафике или построение статистических границ аномалий.
2. Применение модели для потоковой детекции.

Для вектора признаков  $f(x)$  алгоритм вычисляет дискриминантную функцию:

$$D(x) = w^T x + b, \quad (26)$$

<sup>32</sup> Sharma, R., Sood, S.K. A Survey on DDoS Detection Using Machine Learning Algorithms // Journal of Network and Computer Applications, 2022. — Т. 198. — С. 61–72.

<sup>33</sup> He, Z., Chan, K.C.C. Machine Learning for DDoS Detection: Survey and Challenges // Journal of Network and Computer Applications, 2022. — Т. 200. — С. 12–20.

<sup>34</sup> Kwon, D., Kim, D.H. Deep Anomaly Detection in Network Traffic // Sensors, 2023. — Т. 23(1). — С. 80–87.

и относит трафик к классу атаки при  $D(x) \geq 0$  (либо применяет логистическую функцию для вероятности). Модель обучается подбором параметров  $w$  и  $b$  (в SVM – максимизация разделяющей границы, в деревьях – построение структур с минимизацией ошибки и т.д.). Оптимизация использует функции потерь (кросс-энтропия, среднеквадратичная ошибка) и регуляризацию для избежания переобучения.

Классификационная методика аномалий сочетает статистическую обработку, машинное обучение и инженерную реализацию (метрики качества, подбор порогов, балансировка классов). Она описывает нормальное поведение трафика и отделяет случаи атак.

## 2.4. Структура алгоритма выявления DDoS-атак

Алгоритм обнаружения DDoS-атаки представляет собой последовательность этапов (Рис.1), объединяющих сбор и анализ трафика с принятием решения о наличии атаки <sup>35</sup>.



Рисунок 1 – Алгоритм обнаружения и предотвращения DDoS-атак

<sup>35</sup> Ullah, F., et al. Deep and Hybrid Learning Approaches for DDoS Detection // Future Generation Computer Systems, 2022. — Т. 130. — С. 18–30.

Структура алгоритма включает:

- Сбор данных. Система захватывает пакеты или агрегирует потоки по 5-tuples (IP-адреса, порты, протокол) из зеркальных портов или NetFlow/sFlow, обновляя счетчики трафика в скользящем окне.
- Предобработка и агрегация. Данные очищаются, формируются статистические характеристики, вычисляются признаки  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , проводится нормализация или выделение сессий.
- Для полученного вектора признаков  $x$  производится вычисление детекторной функции, описанной в разделе 2.4. В простейшем случае это проверка условия  $x > PV$  (превышение порогов), в более сложном – применение обученной модели машинного обучения (например, вычисление результата логистической регрессии или проход по деревьям классификатора). Математически это может быть выражено как:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } f(x) \geq T, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (27)$$

где  $f(x)$  – значение функции классификации, а  $T$  – порог. Если  $D(x) = 1$ , это означает обнаружение признака атаки.

- Фильтрация и реагирование. При аномалии формируются сигнатуры, создаются ACL/фильтры, отправляются уведомления, логируется подозрительный трафик.
- Адаптация. После атаки обновляется профиль сети, модель или пороги для учета изменений трафика.

Каждый шаг формализуется: признаки — формулами (скорость, пропускная способность), классификация — уравнениями модели (например, скалярное произведение), метрики — критериями решения.

Алгоритм работает по схеме: сбор данных → выделение признаков → проверка условий → сигнал об атаке. Он непрерывно собирает статистику, преобразует в  $x(t)$ , применяет  $f(x)$ , сравнивает с  $T$ , инициируя защиту и уведомления при превышении.

### 3. РЕАЛИЗАЦИЯ ПРОГРАММНОГО СРЕДСТВА ВЫЯВЛЕНИЯ DDOS-АТАК

#### 3.1. Архитектура и компоненты программной системы

Архитектурно система построена по модульному принципу, что обеспечивает гибкость расширения и упрощает сопровождение. Основные компоненты:

- GUI-интерфейс (Tkinter) – пользовательская оболочка, обеспечивающая мониторинг трафика в реальном времени, просмотр алертов, управление фильтрами, порогами и функциями блокировки.
- Сетевой сниффер (NetworkSniffer) – модуль захвата трафика с поддержкой фильтрации по интерфейсу, протоколу, направлению и IP-адресу, реализованный с использованием Scapy.
- Анализатор атак (ImprovedDDoSAnalyzer) – подсистема анализа, выявляющая признаки SYN- и UDP-Flood атак, реализованная с возможностью подключения машинного обучения.
- Телеграм-бот (TelegramBotAdvanced) – канал удалённого взаимодействия с пользователем, предоставляющий доступ к статистике, алертам и функциям блокировки.
- Менеджер межсетевого экрана (FirewallManager) – утилита управления блокировкой IP-адресов и портов через системные команды iptables (Linux) или netsh (Windows).

Конфигурационный модуль – загрузка и применение параметров работы из JSON-файла config.json, включая пороги, чувствительность, разрешённых пользователей и параметры логирования.

Система построена по модульному принципу для гибкости и упрощения сопровождения. Компоненты:

- GUI-интерфейс (Tkinter) - мониторинг трафика в реальном времени, просмотр алертов, управление фильтрами, порогами и блокировкой.
- Сетевой сниффер (NetworkSniffer) - захват трафика с фильтрацией по интерфейсу, протоколу, направлению и IP-адресу, реализован на Scapy.
- Анализатор атак (ImprovedDDoSAnalyzer) выявляет SYN- и UDP-Flood атаки, поддерживает машинное обучение. Telegram-бот (TelegramBotAdvanced) обеспечивает удалённый доступ к статистике, алертам и функциям блокировки.
- Менеджер межсетевого экрана (FirewallManager) блокирует IP-

адреса и порты через iptables (Linux) или netsh (Windows).

- Конфигурационный модуль загружает параметры из config.json (пороги, чувствительность, разрешённые пользователи, логирование).

На рисунке 2 представлена обобщённая схема архитектуры системы.

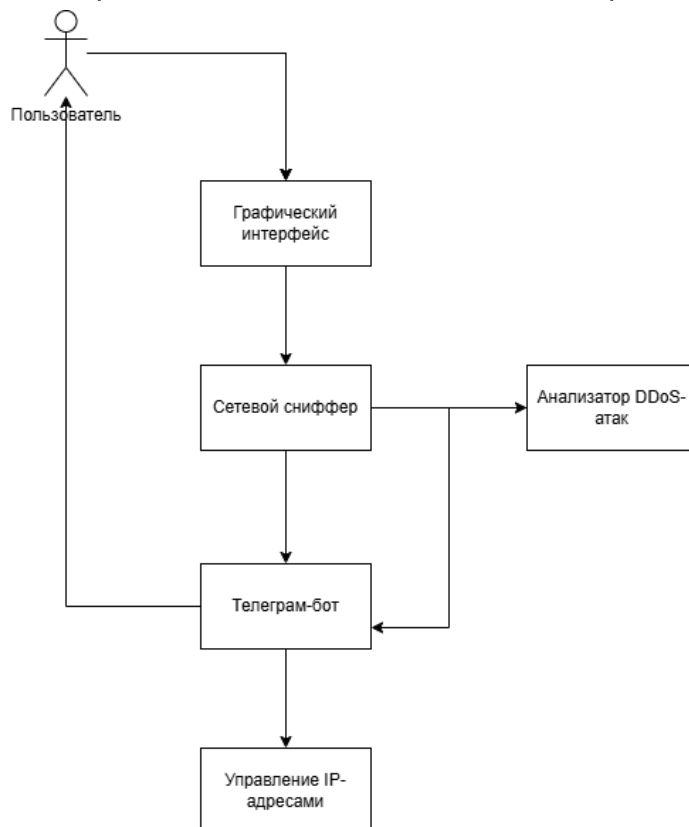


Рисунок 2 – Архитектура системы

Программная система построена по событийной архитектуре. Центральным элементом — графический интерфейс, через который запускается сниффер, настраиваются фильтры, просматриваются алерты и управляются правила блокировки.

После запуска пользователь выбирает сетевой интерфейс, инициализируя модуль NetworkSniffer, который начинает захват трафика в реальном времени. Каждый пакет анализируется, и его метаданные передаются в ImprovedDDoSAnalyzer.

Анализатор определяет DDoS-атаки по следующим принципам:

- сравнение метрик с адаптивным статистическим фоном (baseline);
- проверка TCP-пакетов на наличие SYN-флага и аномальной активности;

- анализ UDP-трафика по объёму и числу портов;
- классификация потока с помощью обученной нейросети.

При обнаружении атаки формируется алерт с указанием IP-источника, типа атаки, времени и направления. Алерт отображается в интерфейсе, заносится в историю и передаётся в TelegramBotAdvanced. При уровне угрозы High или Critical выполняется автоматическая блокировка IP через FirewallManager.

Управление системой возможно локально (GUI) и удалённо (Telegram), что поддерживает принцип замкнутого управляющего контура.

### 3.2. Технологический стек и инструменты разработки

Базовым языком разработки выбран Python благодаря библиотекам для сетевого анализа, машинного обучения, GUI и интеграции с внешними API.

Используются:

- Scapy, socket, psutil — сетевой анализ и мониторинг,
- scikit-learn, pandas, numpy, joblib, pyarrow — обучение и применение моделей, работа с датасетом CIC-DDoS2019,
- Tkinter — графический интерфейс,
- python-telegram-bot — удалённое управление и уведомления,
- netsh advfirewall (Windows), iptables (Linux) — управление фаерволом.

Для перехвата и обработки трафика используется Scapy, предоставляющая API для захвата, фильтрации, декодирования и генерации пакетов (Ethernet, IP, TCP, UDP, ICMP). Psutil применяется для мониторинга интерфейсов, сетевых подключений и загрузки системы. Дополнительно задействована библиотека psutil для мониторинга интерфейсов, определения сетевых подключений и загрузки системы.

Преимущества Scapy:

- поддержка пользовательской фильтрации пакетов,
- разбор TCP-флагов,
- независимость от внешних инструментов (Wireshark, tcpdump).

Для поведенческого анализа и классификации потоков применяются:

- scikit-learn — классификаторы (Random Forest, SVM), масштабирование признаков, кросс-валидация, оценка точности,

- pandas, numpy — обработка данных, построение матриц признаков, расчёт метрик (энтропия, дисперсия, корреляция),
- joblib — сохранение и загрузка моделей,
- pyarrow — работа с датасетом CIC-DDoS2019 в формате .parquet.

Модель машинного обучения в ImprovedDDoSAnalyzer обучается на размеченных данных (SYN/UDP-трафик) и применяется к реальным потокам для адаптивной классификации атак.

Графическая оболочка реализована с помощью Tkinter. Возможности:

- кроссплатформенная поддержка (Windows, Linux),
- окна, меню, таблицы, кнопки, списки, фильтры,
- обработка событий пользователя,
- минимальные зависимости.

GUI включает:

- список перехваченных пакетов,
- фильтрацию по IP, порту, протоколу, направлению,
- отображение тревог по типам атак,
- системный лог анализатора.

Для удалённого управления используется python-telegram-bot.

Возможности:

- обработка сообщений и команд,
- inline-кнопки,
- разграничение прав по ID администратора.

Интеграция Telegram-бота позволяет управлять блокировкой IP и получать уведомления о DDoS-активности.

Активная защита реализована через FirewallManager, работающий с ОС:

- В Windows — через команду netsh advfirewall,
- В Linux — с помощью iptables.

Поддерживается временная блокировка и удаление устаревших правил.

Параметры системы хранятся в config.json:

- список интерфейсов и фильтров,

- пороговые значения (SYN-rate, UDP-rate, чувствительность),
- ключ Telegram-бота и ID администратора,
- параметры модели машинного обучения.

Модуль конфигурации обеспечивает централизованную настройку и загрузку параметров без перекомпиляции или перезапуска системы.

### 3.3. Реализация модуля мониторинга трафика

Модуль мониторинга трафика является базовым компонентом системы и выполняет перехват, предварительный разбор и маршрутизацию сетевых пакетов к подсистемам анализа и визуализации. Реализация основана на библиотеке Scapy, обеспечивающей захват трафика на уровне IP, фильтрацию и извлечение атрибутов.

Цель модуля — непрерывный захват входящих и исходящих пакетов в реальном времени с настройкой фильтров и передачей данных в систему анализа. Требования:

- минимальная задержка обработки (актуально для UDP- и SYN-Flood),
- фильтрация по интерфейсу и протоколу,
- поддержка двустороннего анализа,
- интеграция с GUI и Telegram-ботом,
- кроссплатформенность (Windows, Linux).

Модуль реализован в виде класса NetworkSniffer, включающего методы инициализации интерфейса, запуска захвата, анализа и передачи пакетов в очередь.

Результаты работы модуля передаются:

- в ImprovedDDoSAnalyzer — для классификации поведения источников,
- в TrafficMonitorFrame — для отображения списка пакетов, фильтрации и логирования,
- в Telegram-бот — при генерации алертов.

NetworkSniffer является связующим звеном между низкоуровневой сетевой подсистемой и механизмами реагирования. Его производительность критична для работы всей системы.

Модуль реализован на Python с использованием Scapy, поддерживает асинхронный захват, фильтрацию, определение направления трафика и взаимодействие с подсистемами анализа, и визуализации. Архитектура

ориентирована на обработку трафика в реальном времени с минимальными задержками и интеграцией методов обнаружения DDoS-атак.

### 3.4. Реализация модуля анализа и выявления атак

Модуль анализа и выявления атак является ключевым элементом системы, отвечающим за интерпретацию сетевого трафика и определение DDoS-активности. Задача — распознавание сигнатур атак (SYN/UDP Flood) и аномалий в поведении источников с использованием методов машинного обучения и статистической оценки параметров трафика.

Модуль реализован в виде класса ImprovedDDoSAnalyzer, получающего от sniffера агрегированную информацию о каждом пакете и обрабатывающего её в реальном времени. Логические компоненты:

- агрегация метрик по IP-источникам (количество пакетов, частота SYN-флагов, объём UDP-трафика и др. в скользящем окне),
- пороговый анализ (сравнение скорости поступления пакетов с эмпирическими значениями по данным CIC-DDoS2019),
- поведенческая модель на основе ML (классификация источников с использованием обученной модели),
- генерация тревог (уведомления в GUI и Telegram-бот),
- интеграция с блокировкой (вызов методов FirewallManager при высоком уровне опасности).

Каждый пакет проходит структурирование и извлечение признаков. Для каждого IP создаётся или обновляется запись с агрегированной статистикой за последние N секунд (скользящее окно). Анализируются метрики:

- количество SYN-пакетов без подтверждения,
- объём и скорость UDP-трафика,
- средний интервал между пакетами,
- энтропия IP-источников,
- дисперсия размеров пакетов.

В качестве классификатора используется RandomForestClassifier из scikit-learn, обученный на датасете CIC-DDoS2019. Модель сериализована с помощью joblib и загружается при старте модуля. Предсказание (predict\_proba) выполняется для агрегированных потоков; при превышении порога источник помечается как атакующий. Поведенческая модель дополняет пороговый анализ и позволяет выявлять слабые и распределённые атаки.

Модуль поддерживает:

- загрузку альтернативных моделей,
- адаптацию порогов по статистике последних окон,
- повторное обучение на локальных данных (через GUI или CLI).

Реализована функция логирования ложных срабатываний и ведение «белого списка» IP для исключения блокировки критичных узлов.

Модуль анализа и выявления атак сочетает пороговый и поведенческий анализ, поддерживает сигнатурные признаки и интеллектуальную обработку агрегированных потоков с использованием машинного обучения. Обеспечивается высокая чувствительность и адаптивность к различным сценариям DDoS-атак.

### 3.5. Разработка интерфейса пользователя

Интерфейс пользователя обеспечивает взаимодействие оператора с системой обнаружения DDoS-атак. Он выполняет функции визуализации состояния сетевого трафика, управления параметрами мониторинга, реагирования на инциденты и интеграции с удалёнными средствами управления (Telegram-бот).

Графический интерфейс реализован с использованием Tkinter, встроенного в стандартную поставку Python. Этот инструмент позволяет создавать кроссплатформенные оконные приложения с минимальными затратами.

Причины выбора Tkinter:

- нативная поддержка Windows/Linux,
- возможности создания многооконных структур,
- совместимость с многопоточными процессами,
- простая интеграция с другими Python-компонентами (анализатор, сниффер).

Интерфейс организован по модульной структуре с использованием объектно-ориентированного подхода. Основные окна и элементы сгруппированы в отдельные фреймы, каждый из которых выполняет определённую функцию.

На основной вкладке (Рис.3) присутствуют следующие компоненты.

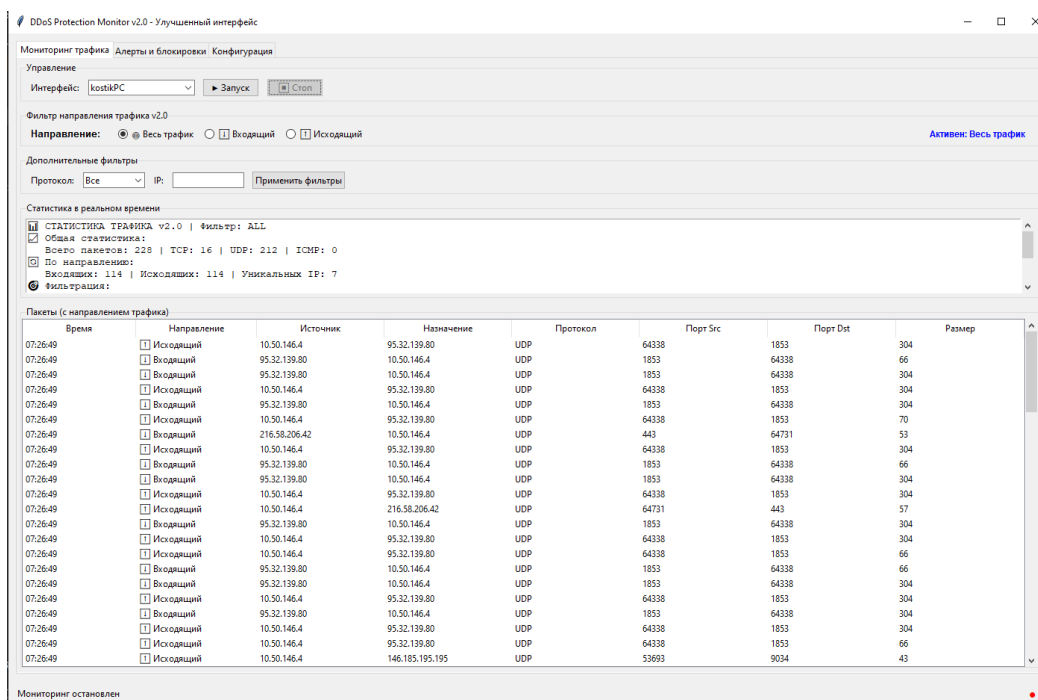


Рисунок 3 – Панель управления мониторингом трафика

Панель управления мониторингом трафика:

- Выбор сетевого интерфейса;
- Кнопки запуска и остановки захвата;
- Фильтры по IP, порту, направлению и протоколу;
- Сброс настроек и очистка истории пакетов.

Таблица захваченных пакетов:

- Время получения;
- IP-источник и IP-назначение;
- Протокол;
- Размер пакета;
- Направление (входящий/исходящий);

Каждая запись обновляется в реальном времени и может быть выделена для подробного просмотра.

Далее идет вкладка тревог (Рис.4), отображающая список выявленных атакующих потоков и источников.

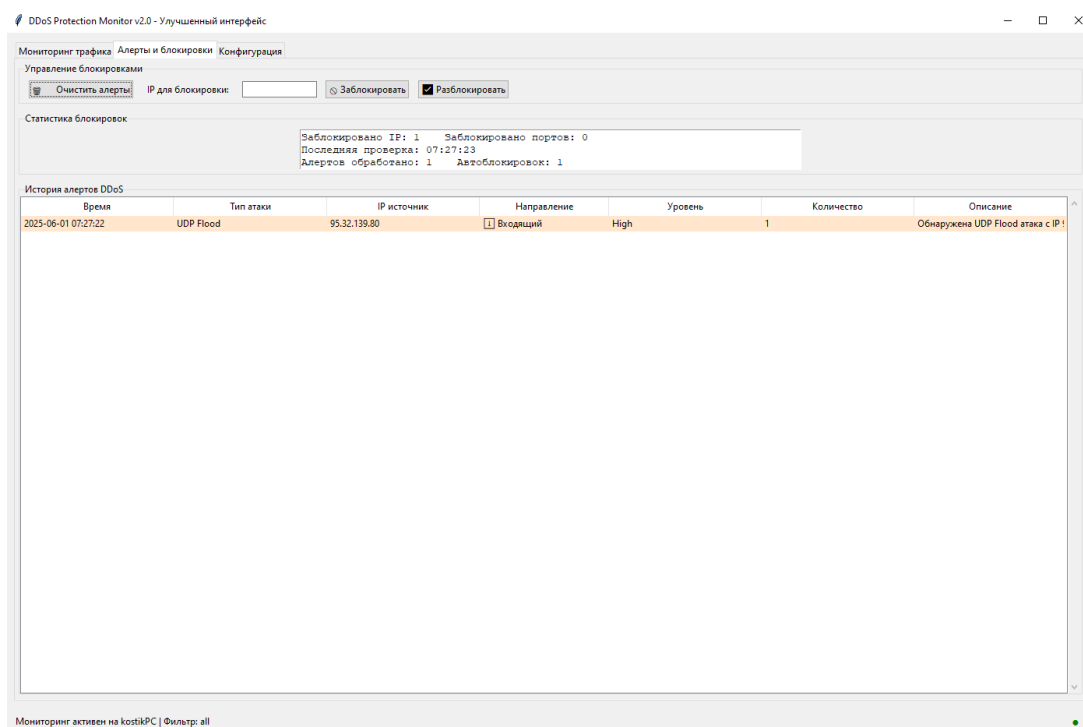


Рисунок 4 – Окно тревог

Для каждой записи выводятся:

- Тип атаки;
- IP-адрес источника;
- Уровень опасности;
- Время начала атаки;

Интерфейс пользователя реализован как полнофункциональное средство мониторинга и управления системой обнаружения атак. Он обеспечивает визуализацию сетевого трафика, отображение тревог, настройку параметров и оперативное взаимодействие с аналитическим ядром и телеграм-ботом. Простота и интерактивность делают систему удобной для эксплуатации в режиме реального времени как специалистами, так и системными администраторами без глубоких знаний в области анализа сетевого трафика.

### 3.6. Интеграция Telegram-бота и системы уведомлений

В работе реализована интеграция с Telegram. Бот используется как канал уведомлений и интерфейс управления системой выявления DDoS-атак.

#### Функции Telegram-бота:

- оповещение при обнаружении подозрительной активности,
- получение статистики (число пакетов, активных потоков, алертов, интерфейсов и др.),
- удалённая блокировка IP-адресов,
- управление параметрами (пороги чувствительности, перезапуск анализа, включение/отключение модулей),
- журналирование действий (история уведомлений и команд).

Бот является удалённой управляющей оболочкой, дополняющей GUI. В него встроены команды управления (Табл. 1).

Таблица 1

Список возможных команд в Telegram-боте

| Команда          | Назначение                                                 |
|------------------|------------------------------------------------------------|
| /start           | Приветствие и краткая справка по командам                  |
| /stats           | Отправка текущей сетевой статистики                        |
| /alerts          | Список последних тревог (IP, тип атаки, время)             |
| block_ip <IP>    | Принудительная блокировка IP-адреса                        |
| /unblock_ip <IP> | Разблокировка адреса (если ранее был заблокирован вручную) |
| /thresholds      | Получение и изменение текущих порогов анализа              |
| /reset           | Очистка списка тревог и статистики                         |

Для повышения удобства взаимодействия предусмотрены inline-кнопки и клавиатуры, позволяющие, например, мгновенно заблокировать IP после уведомления об атаке. Пример автоматического уведомления представлен на рисунке 5.

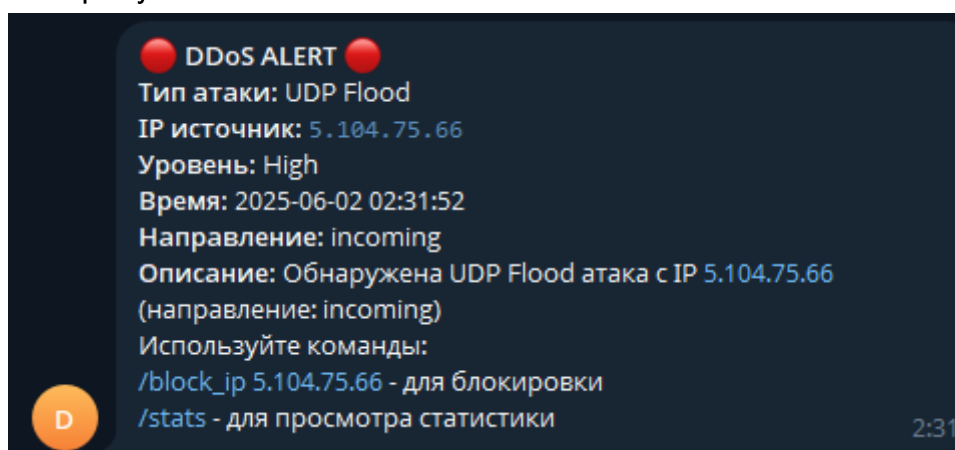


Рисунок 5 – Уведомления о DDoS-атаке

Сообщения Telegram-бота позволяют администратору реагировать без использования GUI или терминала. Команды транслируются в методы

GUI или CLI-модулей: например, `/block_ip` вызывает функцию `block_ip()` в менеджере межсетевого экрана, а `/thresholds` обновляет параметры анализа в конфигурации.

Коммуникация реализована на событийной архитектуре с асинхронными очередями, что обеспечивает высокую отзывчивость системы при интенсивной атаке.

Меры безопасности:

- фильтрация пользователей по ID (администратор указан в `config.json`),
- логирование всех действий,
- изоляция телеграм-сообщений от критических функций (при ошибках или некорректных запросах команды отклоняются).

Предусмотрено расширение: двухфакторная авторизация и интеграция с Telegram Channels для широковебчатых уведомлений.

Telegram-бот используется как инструмент уведомлений и удалённого управления системой DDoS-детектирования. Он дополняет GUI, повышает оперативность реагирования и устойчивость системы при высокой нагрузке.

### 3.7. Тестирование

Цель тестирования — подтвердить, что система корректно функционирует в условиях как нормального трафика, так и при различных типах атак уровня L3/L4, а также обеспечивать стабильную работу интерфейса и своевременное оповещение администратора.

#### 3.7.1 Методика тестирования

Для комплексной оценки функционирования программного решения применялась следующая методика:

Функциональное тестирование:

- Проверка корректности захвата и отображения сетевых пакетов;
- Проверка фильтрации по IP, портам, направлению и протоколу;
- Проверка реакции на настраиваемые пороговые значения;
- Проверка генерации алертов при выявлении атак;
- Проверка работоспособности телеграм-бота и команд.

Тестирование на целевых атаках:

- Подключение реального трафика из датасета CIC-DDoS2019;
- Запуск атак с разных IP и на разные порты, включая смешанные

сценарии.

Нагрузочное тестирование:

- Подключение скриптов генерации фонового трафика;
- Оценка времени реакции и устойчивости GUI и Telegram-бота при увеличенной нагрузке;
- Измерение задержек между детектированием и отображением тревоги.

### 3.7.2. Результаты тестирования

Функциональность:

- Все основные элементы интерфейса работали без сбоев;
- Сниффер корректно фильтровал и отображал пакеты в GUI;
- Генерация тревог происходила при превышении заданных порогов;
- Telegram-бот своевременно отправлял уведомления и обрабатывал команды управления.

Выявление атак:

- При запуске SYN-Flood и UDP-Flood тревоги появлялись в течение 1–2 секунд после начала атаки;
- Система корректно определяла IP-источник, тип атаки и генерировала соответствующий алерт;
- Блокировка IP происходила автоматически при уровне угрозы «высокий»;
- В тестах на CIC-DDoS2019 модель машинного обучения демонстрировала точность от 98.7% до 99.9% на валидационном подмножестве.

Надёжность и устойчивость:

- При нагрузке до 3000 пакетов/секунду система сохраняла устойчивость;
- GUI не зависал благодаря работе в отдельных потоках;
- Telegram-бот сохранял отзывчивость.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследована защита информационных сетей от распределённых атак типа DDoS на уровнях L3 и L4 модели OSI. Рассмотрены угрозы и уязвимости сетевой инфраструктуры, классификация атак, а также методы их обнаружения и предотвращения с использованием анализа трафика

и машинного обучения.

Основное внимание уделено атакам SYN-Flood и UDP-Flood. Проанализированы подходы: сигнатурный, статистический, поведенческий и их комбинации в гибридных системах.

Разработано программное средство для мониторинга и выявления атак в реальном времени. Архитектура включает:

- модуль захвата трафика (Scapy),
- анализатор аномалий (пороговые методы + машинное обучение),
- графический интерфейс для визуализации и управления,
- Telegram-бот для оповещения и удалённого управления,
- механизм блокировки IP через интеграцию с межсетевыми экранами.

Экспериментальное тестирование на реальном трафике и датасете CIC-DDoS2019 показало:

- точность детектирования атак 98,7–99,9%,
- время реакции 1–2 секунды,
- устойчивость при нагрузке до 3000 пакетов/с.

Практическая значимость — доступное средство защиты для организаций и частных пользователей без необходимости дорогостоящего оборудования. Система адаптируется под разные сети и может быть основой для более сложных решений.

Научный результат — комбинирование классических методов и машинного обучения для повышения точности и адаптивности.

Разработанное решение демонстрирует возможность построения эффективной защиты с балансом между точностью, производительностью и доступностью.

## Глава 3. Вероятностный анализ одномерных случайных величин

### § 1. Вероятностное пространство.

Прежде всего, напомним понятие вероятностного пространства, поскольку оно является математической моделью случайного эксперимента и играет существенную роль в определении случайной величины.

**Вероятностным пространством** называется тройка объектов  $(\Omega, U, P)$ , где  $\Omega$  – пространство элементарных событий,  $U$  – множество событий,  $P$  – вероятностная мера (вероятность).

**Пространство элементарных событий** (исходов)  $\Omega$  состоит из всех взаимно исключающих друг друга и считающихся далее неделимыми исходов эксперимента. Отдельные элементарные события обозначаются греческой буквой  $\omega$ . Эксперимент всегда заканчивается одним из элементарных исходов. Итак,  $\Omega = \{\omega\}$ . Отметим, что ничто не мешает объявить далее неделимыми исходы, которые формально можно разделить на более мелкие (если нет необходимости в таком делении).

Второй объект  $U$  вероятностного пространства является **множеством случайных событий** (не только элементарных, но и более сложных), связанных с экспериментом.

**В случае, когда  $\Omega$  является дискретным (то есть состоит из конечного или счетного числа элементарных событий) случайным событием назовем любое его подмножество.** Это означает, что при дискретном  $\Omega$  множество случайных событий  $U$  совпадает с множеством всех подмножеств  $\Omega$ . Однако, когда  $\Omega$  не является конечным или счетным, например, является непрерывным подмножеством прямой, плоскости или  $n$ -мерного пространства, существуют так называемые неизмеримые подмножества, лишенные длины, площади, или объема. Это не позволяет задать вероятность непротиворечивым образом. В этом случае определение события более сложное, но в данном пособии мы не будем его детально обсуждать и **назовем событием любое подмножество  $\Omega$ , имеющее естественную меру (длину, площадь или объем).** Таким образом, множество всех событий  $U$  в этом случае образовано лишь такими подмножествами  $\Omega$ .

Для завершения математической модели случайного эксперимента остается ввести третий объект  $P$  вероятностного пространства – понятие

вероятности. Числовая функция  $P(A)$ , определяемая на множестве событий  $U$  называется вероятностью, если выполнены аксиомы Колмогорова:

a1) неотрицательности:  $P(A) \geq 0 \forall A \in U$ ;

a2) нормированности:  $P(\Omega) = 1$ ;

a3) аддитивности: для попарно несовместных событий  $A_1, A_2, \dots, A_k$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) = \sum_{i=1}^k P(A_i) \text{ для любого конечного или бесконечного } k.$$

Мы завершили построение математической модели эксперимента в виде вероятностного пространства, то есть тройки  $(\Omega, U, P)$ , где  $\Omega$  – пространство элементарных событий –  $U$  – множество событий,  $P$  – вероятность, определённая для всех событий  $A \in U$ .

**Пример 1.** Рекрутинговое агентство «Алмаз» объявило о конкурсе на одну из должностей топ-менеджмента компании «Лукойл». В качестве претендентов рассматриваются десять кандидатов для замещения указанной позиции, среди которых находится и знакомый Вам коллега Николай Иванович. Каждый из соискателей по очереди проходит собеседование по одному тесту из имеющихся десяти различных тестовых заданий. При этом каждый следующий кандидат отвечает на один из оставшихся тестов, который выбирают наугад. Николай Иванович хорошо подготовлен только по одному тесту. Когда предпочтительнее заходить Николаю Ивановичу, чтобы он смог выбрать известный ему тест и занять должность?

Предложим два варианта решения задачи, чтобы продемонстрировать разные возможности описания вероятностного пространства.

**Решение 1.** Свяжем описание элементарного события только с Николаем Ивановичем, а именно,  $\omega = i$ , где  $i$  – номер теста, который ему достался. Элементарные события равновозможны, их количество равно  $|\Omega| = 10$ , следовательно, применимо классическое определение вероятности. Благоприятный исход один, тогда вероятность получить должность равна  $1/10 = 0,1$ .

**Решение 2.** Занумеруем кандидатов и свяжем описание элементарного события со всеми кандидатами, а именно,  $\omega = (a_1, a_2, \dots, a_{10})$ , где  $a_i$  – номер теста, который достался кандидату с номером  $i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 10$ . Все элементарные события равновозможны, их количество равно  $|\Omega| = 10!$ . Пусть теперь для определенности тест, известный Николаю Ивановичу, имеет номер 10. Тогда, если он проходит тест первым, то благоприятными для него являются те  $\omega$ , в которых на первом месте стоит 10, а тесты остальных кандидатов

стоят в произвольном порядке. Таких исходов  $9!$ . Соответственно, вероятность получить должность равна  $9!/10! = 0,1$ . Аналогичное рассуждение получается, если Николай Иванович проходит тест на любом другом месте, то есть порядок тестирования кандидатов безразличен.

Как видно, разные варианты задания вероятностного пространства в данном случае привели нас к одинаковому ответу.

**Пример 2.** Переналадка конвейера не производится до тех пор, пока не появятся две бракованные детали подряд. Построим пространство элементарных событий и множество событий.

**Решение.** Элементарные события в данном случае имеют вид векторов из нулей и единиц, где ноль означает исправную деталь, а единица - бракованную:

$$\omega_1 = (1, 1), \quad \omega_2 = (0, 1, 1), \quad \omega_3 = (0, 0, 1, 1), \quad \omega_4 = (0, 0, 0, 1, 1) \dots$$

Пространство элементарных событий  $\Omega = \{\omega_i\}$  имеет счетную мощность, поскольку оно бесконечно, но допускает нумерацию своих элементов. Случайным событием в данном случае является любое подмножество  $\Omega$  (по определению), то есть множество событий  $U$  является множеством всех подмножеств  $\Omega$ . Например событие, объединяющее три исхода  $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ , состоит в том, что переналадка потребуется до появления пятой детали на конвейере.

В теории случайных событий изучаются свойства событий и правила вычисления их вероятностей, с которыми читатель уже знаком, а мы переходим к теории, связанной со случайными величинами.

## § 2. Одномерные случайные величины

События, связанные со случайным экспериментом часто имеют нечисловую природу. Было бы удобно перенести их качественные свойства на количественную шкалу с привязкой вероятностей исходных событий к вероятностям соответствующих образов этих событий на числовой оси. Для пояснения приведем простой пример целесообразности такого действия

**Пример.** На экзамене 10 задач. Результат их решения задается элементарным исходом

$$\omega = (a_1, a_2, \dots, a_{10}), \quad \text{где } a_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-ая задача решена,} \\ 0, & \text{если } i\text{-ая задача не решена.} \end{cases}$$

При принятии решения о количестве набранных баллов за экзамен целесообразно упростить информацию. Для этого сначала введем функцию, равную количеству решенных задач  $f(\omega) = \sum_{i=1}^{10} a_i$ , а от нее перейдем к количе-

$$\text{ству набранных баллов за экзамен } g(f(\omega)) = \begin{cases} 2, & \text{если } f(\omega) \leq 5, \\ 3, & \text{если } f(\omega) = 6 \text{ или } 7, \\ 4 & \text{если } f(\omega) = 8 \text{ или } 9, \\ 5 & \text{если } f(\omega) = 10. \end{cases}$$

Удобство работы с помощью этих преобразований очевидно. Функция  $f(\omega)$  сократила объем информации в десять раз, а  $g(f(\omega))$  дала возможность перейти к аттестационным балам за работу.

Наши действия свелись к заданию удобных функций на множестве элементарных событий. Они называются случайными величинами. Перейдем к определению случайной величины.

Пусть  $(\Omega, U, P)$  - некоторое вероятностное пространство. Назовем *случайной величиной (СВ) числовую функцию, определенную  $\forall \omega \in \Omega$  и обладающую свойством:*

$$\forall x \in (-\infty, +\infty) \text{ существует } P(\xi < x) = P(\{\omega\} | \xi(\omega) < x).$$

Последняя запись читается как «вероятность множества тех  $\omega$ , для которых  $\xi(\omega) < x$ ». Поясним это свойство. Оно говорит, что для вычисления вероятности события  $\{\xi < x\}$  на числовой прямой необходимо и достаточно в пространстве элементарных событий  $\Omega$  выделить подмножество всех таких  $\omega$ , для которых  $\xi(\omega) < x$ , найти его вероятность и присвоить ее вероятности события  $\{\xi < x\}$  на числовой оси. Требование существования такой вероятности означает, что  $(\{\omega\} | \xi(\omega) < x)$  является событием. Этот алгоритм осуществляет перенос вероятности с множества событий  $U$  на множества значений случайной величины, имеющих вид интервалов  $(-\infty, x) \forall x$ . Этого достаточно, чтобы вести вероятностный анализ поведения случайной величины, т.е. указанное свойство обеспечивает приемственность исходного вероятностного пространства и случайной величины.

**Функцией распределения  $F_\xi(x)$  случайной величины  $\xi$  называется**  
 $F_\xi(x) = P(\xi < x), \quad x \in (-\infty, +\infty).$

Назовем **законом распределения случайной величины  $\xi$**  любую ее характеристику, по которой можно найти функцию распределения  $F_\xi(x)$ . В частности сама  $F_\xi(x)$  является законом распределения случайной величины  $\xi$ .

### Свойства функции распределения

Эти свойства опираются на свойства вероятностей событий, которые изучались в более ранних разделах дисциплины. Первые два свойства являются свойствами вероятности.

**С.1.**  $0 \leq F_\xi(x) \leq 1 \quad \forall x \in (-\infty, +\infty)$ .

**С.2.**  $P(\xi \geq x) = 1 - F_\xi(x)$ .

Следующие два свойства докажем одновременно

**С.3.**  $F_\xi(x_1) \leq F_\xi(x_2)$  при  $x_1 \leq x_2$ .

**С.4.**  $P(x_1 \leq \xi < x_2) = F_\xi(x_2) - F_\xi(x_1)$ .

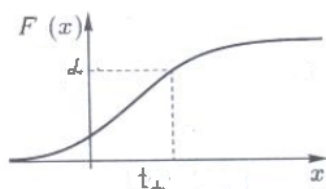
Действительно,  $P(\xi < x_2) = P((\xi < x_1) \cup (x_1 \leq \xi < x_2)) = P(\xi < x_1) + P(x_1 \leq \xi < x_2)$ , следовательно,  $F_\xi(x_2) = F_\xi(x_1) + P(x_1 \leq \xi < x_2)$ ,

т.е С.3 и С.4 доказаны.

**С.5.**  $F_\xi(x) \rightarrow 1$  при  $x \rightarrow +\infty$ ,  $F_\xi(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow -\infty$

**С.6.**  $F_\xi(x)$  непрерывна слева в любой точке, т.е. при  $t > 0 \lim_{t \rightarrow 0} F_\xi(x-t) = F_\xi(x)$ .

**Квантилью уровня  $\alpha$**  (или  $\alpha$ -квантилью) функции распределения  $F(x)$  называется число  $t_\alpha$ , при котором  $F(t_\alpha) = \alpha$ , то есть  $P(\xi < t_\alpha) = \alpha$ .



Иногда вместо квантилей используют  **$\alpha$ -процентные точки  $t_\alpha$** , которые являются корнем уравнения  $F(t_\alpha) = 1 - \alpha$ . Очевидно, что  $\alpha$ -процентная точка равна  $(1 - \alpha)$ -квантили.

**Случайная величина  $\xi$  называется дискретной**, если множество ее значений конечно или счетно.

**Законом распределения дискретной СВ** является информация вида

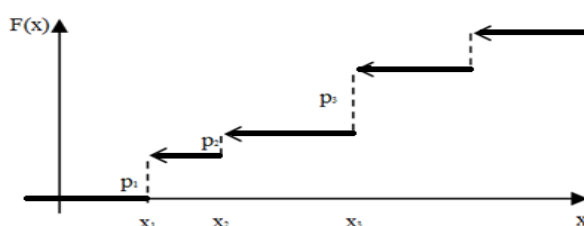
|            |              |              |     |              |     |
|------------|--------------|--------------|-----|--------------|-----|
| $x$        | $x_1$        | $x_2$        | ... | $x_i$        | ... |
| $p_\xi(x)$ | $p_\xi(x_1)$ | $p_\xi(x_2)$ | ... | $p_\xi(x_i)$ | ... |

где  $x_1 < x_2 < \dots$  - значения СВ, а  $p_\xi(x_i) = P(\xi = x_i) = P(\{\omega\} | \xi(\omega) = x_i)$ , причем выполнены свойства вероятностей:

$\forall x_i, p_{\xi}(x_i) \geq 0$ , и  $\sum_{i \geq 1} p_{\xi}(x_i) = 1$ , так как

$$\sum_{i \geq 1} p_{\xi}(x_i) = P(\xi = x_1 \cup \xi = x_2 \cup \dots) = P(\{\omega\} | \xi(\omega) = x_1 \cup \xi(\omega) = x_2 \cup \dots) = P(\Omega) = 1$$

Поскольку информация в таблице, очевидно, позволяет найти функцию распределения  $F_{\xi}(x) = P(\xi < x) = \sum_{x_i < x} p_{\xi}(x_i)$ , то это действительно закон распределения. График функции распределения  $F_{\xi}(x)$  дискретной СВ схематически можно представить в виде непрерывной слева ступенчатой линии,



у которой точки скачка совпадают с  $x_1, x_2, \dots$ , а высоты скачков равны  $p_1 = p_{\xi}(x_1), p_2 = p_{\xi}(x_2), p_3 = p_{\xi}(x_3), \dots$  соответственно.

Закон распределения дискретной СВ позволяет найти и вероятность вида

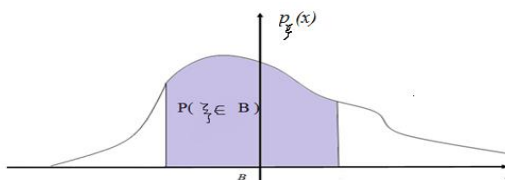
$$P(\xi \in B) = \sum_{x_i \in B} p_{\xi}(x_i) \quad \forall B \subset R.$$

Для этого надо найти все значения  $x_i$ , попавшие во множество  $B$  и сложить их вероятности из таблицы.

**Случайная величина  $\xi$  называется абсолютно непрерывной**, если существует неотрицательная интегрируемая на всей числовой оси функция  $p_{\xi}(x) \geq 0$ , , такая что для любого множества  $B$  на числовой прямой

$$P(\xi \in B) = \int_B p_{\xi}(x) dx.$$

**Функция  $p_{\xi}(x)$  называется плотностью распределения вероятностей.**



В этом случае множество значений  $\xi$  является непрерывным, поэтому нельзя каждому ее значению выделить положительную вероятность. Выход состоит в том, что вероятность множества  $B$  значений  $\xi$  вычисляют как площадь под графиком плотности над множеством  $B$ . Там, где плотность близка

к оси  $Ox$ , расположены редко встречающиеся значения  $x$ , а там, где она сильнее поднята над осью, расположены более часто встречающиеся значения  $x$ .

### Свойства плотности

$$C.1. \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi}(x)dx = P(\xi \in (-\infty, +\infty)) = 1.$$

$$C.2. F_{\xi}(x) = P(\xi < x) = \int_{-\infty}^x p_{\xi}(t)dt.$$

Первые два свойства сразу следуют из определения плотности и функции распределения

$$C.3. p_{\xi}(x) = F'_{\xi}(x).$$

Это свойство прямое математическое следствие из C.2.

C.4. Если плотность является четной функцией (симметричной относительно оси  $Oy$ ), то  $F_{\xi}(-x) = 1 - F_{\xi}(x)$ , а квантиль  $t_{\alpha} = -t_{1-\alpha}$ .

*Доказательство.* Из определения плотности получаем:

$$F_{\xi}(-x) = \int_{-\infty}^{-x} p_{\xi}(t)dt, \quad 1 - F_{\xi}(x) = P(\xi \geq x) = \int_x^{+\infty} p_{\xi}(t)dt.$$

Но в силу четности плотности интегралы равны друг другу, первое равенство доказано.

Далее, используя определение квантилей, получим

$$F_{\xi}(-t_{1-\alpha}) = 1 - F_{\xi}(t_{1-\alpha}) = 1 - (1 - \alpha) = \alpha = F_{\xi}(t_{\alpha})$$

Отсюда следует связь квантилей  $t_{\alpha} = -t_{1-\alpha}$ .

C.5. Для абсолютно непрерывной СВ

$$P(\xi = a) = \int_a^a p_{\xi}(x)dx = 0 \quad \forall a.$$

Из свойств следует, что функция распределения  $F_{\xi}(x)$  абсолютно непрерывной случайной величины является непрерывной и не убывает на всей прямой.

**Замечание.** Не следует думать, что многообразие всех случайных величин сводится к дискретным и абсолютно непрерывным.

Введем понятие независимых случайных величин.

**Случайные величины  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  называются независимыми**, если для любых множеств  $A_1, A_2, \dots, A_n$  на прямой верно равенство

$$P(\xi_1 \in A_1, \xi_2 \in A_2, \dots, \xi_n \in A_n) = P(\xi_1 \in A_1) \cdot P(\xi_2 \in A_2) \cdot \dots \cdot P(\xi_n \in A_n)$$

**Теорема (О независимости функций от независимых случайных величин).**

Если  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  - независимые случайные величины, а функции от них  $\eta_1 = f_1(\xi_1), \eta_2 = f_2(\xi_2), \dots, \eta_n = f_n(\xi_n)$  являются новыми случайными величинами, то они независимы.

**Доказательство.** Новые случайные величины являются сложными функциями от  $\omega$ . Каждая  $\eta_i = f_i(\xi_i)$  сначала переводит  $\omega$  в значение  $\xi_i = \xi_i(\omega)$  на числовой оси, а затем от значения  $\xi_i$  следует переход в точку  $\eta_i = f_i(\xi_i)$  на новой числовой оси. Рассмотрим произвольные множества  $A_1, A_2, \dots, A_n$  на этой последней оси и докажем, что

$$P(\eta_1 \in A_1, \eta_2 \in A_2, \dots, \eta_n \in A_n) = P(\eta_1 \in A_1) \cdot P(\eta_2 \in A_2) \cdot \dots \cdot P(\eta_n \in A_n).$$

Для каждого  $A_i$  введем множество  $B_i$  всех точек на первой числовой оси, из которых можно попасть во множество  $A_i$ , тогда

$$P(\eta_1 \in A_1, \eta_2 \in A_2, \dots, \eta_n \in A_n) = P(\xi_1 \in B_1, \xi_2 \in B_2, \dots, \xi_n \in B_n).$$

Но в силу независимости  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$

$$P(\xi_1 \in B_1, \xi_2 \in B_2, \dots, \xi_n \in B_n) = P(\xi_1 \in B_1) \cdot P(\xi_2 \in B_2) \cdot \dots \cdot P(\xi_n \in B_n),$$

а правая часть равна  $P(\eta_1 \in A_1) \cdot P(\eta_2 \in A_2) \cdot \dots \cdot P(\eta_n \in A_n)$ .

Независимость  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  доказана.

### § 3. Примеры законов распределения.

#### *Примеры дискретных законов распределения.*

Сначала остановимся на распределениях, связанных со схемой испытаний Бернулли. Напомним, что испытанием Бернулли называется эксперимент с двумя исходами – успех и неудача, которые реализуются с вероятностями  $p$  и  $q = 1 - p$  соответственно. **Схемой испытаний Бернулли параметрами  $(N, p)$**  называется серия  $N$  одинаковых независимых испытаний Бернулли.

1. Дискретная случайная величина  $\xi$  **распределена по закону Бернулли** с параметром  $p$  ( $0 < p < 1$ ), если она принимает значение 1 (в случае успеха) с вероятностью  $p$  и значение 0 (в случае неудачи) с вероятностью  $q = 1 - p$ . Ее закон распределения имеет вид  $p_\xi(x) = p^x(1-p)^{1-x}$ ,  $x = 0, 1$ , или

|            |             |     |
|------------|-------------|-----|
| $x$        | 0           | 1   |
| $p_\xi(x)$ | $q = 1 - p$ | $p$ |

Для  $\xi$  будем использовать краткую запись  $\xi \in \text{Бер}(p)$ .

**Пример 1.** Пусть  $\xi$  – случайная величина, которая принимает значение 1, если соискатель будет зачислен на вакантную должность (это успех), и принимает значение 0, если не будет (это неудача). Вероятность, что соискатель будет принят на вакантную должность составляет 0,6. Найдите вероятность, что претендент не получит искомую должность, и постройте ряд распределения случайной величины  $\xi$ .

**Решение.**  $\xi \in \text{Бер}(p)$ . По условию  $p = p_\xi(1)=0,6$ . Поскольку у случайной величины только два значения, а сумма вероятностей  $p_\xi(0) + p_\xi(1)=1$ , то вероятность неудачи соискателя

$q = p_\xi(0) = 1 - 0,6 = 0,4$ . Таблица распределения  $\xi$  имеет вид

|            |     |     |
|------------|-----|-----|
| $x$        | 0   | 1   |
| $p_\xi(x)$ | 0,4 | 0,6 |

## 2. Дискретная случайная величина $\xi$ *распределена по*

*биномиальному закону* с параметрами  $(N, p)$ ,  $N=1,2,3,\dots$ ,  $0 < p < 1$ , если она равна числу успехов в схеме испытаний Бернулли параметрами  $(N, p)$ . Такая случайная величина принимает значения  $x=0,1,2,\dots,N$  с вероятностями  $p_\xi(x) = P(\xi = x) = C_N^x p^x (1-p)^{N-x}$ . Для нее будем использовать запись  $\xi \in \text{Бин}(N, p)$ . Для удобства вычислений в приложении к пособию приведена таблица накопленных вероятностей этого закона. В ней  $0 < p \leq 0,5$ , поэтому успехом нужно считать событие с меньшей вероятностью.

**Замечание.** Распределение Бернулли является частным случаем биномиального распределения с параметрами  $(1, p)$ . В свою очередь, очевидно, что если  $\xi \in \text{Бин}(N, p)$ , то она представима в виде суммы  $N$  независимых случайных величин с распределением Бернулли, каждая из которых отвечает за исход своего испытания.

**Пример 2.** В счетную палату представлены четыре финансовых баланса. Вероятность возвращения финансового баланса на корректировку после проверки составляет 0,72. Построить ряд распределения числа возвращенных отчетов на корректировку.

**Решение.** С каждым из четырех поступивших в счетную палату балансов связано испытание Бернулли, в котором успехом считаем возвращение отчета на корректировку. Пусть  $\xi$  – случайная величина, равная числу возвращенных балансов после проверки. Очевидно,  $\xi \in \text{Бин}(N = 4, p = 0,72)$ .

Счетная палата может отправить на корректировку ноль, один, два, три, или 4 отчета. Находим вероятности этих значений случайной величины  $\xi$ , используя биномиальное распределение при  $N = 4$ ,  $p = 0,72$ ,  $q = 1 - p = 0,28$ :

$$p_{\xi}(0) = P(\xi = 0) = C_4^0 p^0 q^4 = 0,28^4 = 0,062;$$

$$p_{\xi}(1) = P(\xi = 1) = C_4^1 p^1 q^3 = 4 \cdot 0,72 \cdot 0,28^3 = 0,063;$$

$$p_{\xi}(2) = P(\xi = 2) = C_4^2 p^2 q^2 = 6 \cdot 0,72^2 \cdot 0,28^2 = 0,244;$$

$$p_{\xi}(3) = P(\xi = 3) = C_4^3 p^3 q^1 = 4 \cdot 0,72^3 \cdot 0,28 = 0,418;$$

$$p_{\xi}(4) = P(\xi = 4) = C_4^4 p^4 q^0 = 0,72^4 \cdot 0,28^0 = 0,269.$$

Соответственно, строим ряд распределения случайной величины  $\xi$  - числа возвращенных отчетов на корректировку.

|              |        |       |       |       |       |
|--------------|--------|-------|-------|-------|-------|
| $x$          | 0      | 1     | 2     | 3     | 4     |
| $p_{\xi}(x)$ | 0,0062 | 0,063 | 0,244 | 0,418 | 0,269 |

**Замечание.** При решении задачи, мы могли бы объявить успехом принятие отчета после проверки счетной палатой. Тогда  $p = 0,28$ ,  $q = 0,72$ . Все остальные рассуждения надо было бы проводить в этих терминах, учитывая, что если число принятых отчетов равно  $k$ , то число отправленных на корректировку равно  $4 - k$ , то есть, если приняли ноль отчетов, то вернули 4, если приняли один отчет, то вернули три, и так далее. *Для использования таблицы накопленного биномиального распределения в приложении так и надо поступать и за успех брать событие, имеющее меньшую вероятность.*

3. Дискретная случайная величина  $\xi$  **распределена по геометрическому закону** с параметром  $p$ , если она равна числу испытаний Бернулли до первого успеха включительно, то есть  $p_{\xi}(x) = P(\xi = x) = q^{x-1} p$ ,  $x = 1, 2, \dots$ . Для нее будем использовать запись  $\xi \in \text{Геом}(p)$ . Функция распределения  $\xi$  ступенчатая, непрерывная слева. Тогда для ее задания на всей числовой оси достаточно найти значения при натуральном аргументе  $x = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} F_{\xi}(x) &= P(\xi < x) = 1 - P(\xi \geq x) = 1 - \sum_{k \geq x} p_{\xi}(k) = 1 - \sum_{k \geq x} q^{k-1} p = \\ &= 1 - p \cdot \frac{q^{x-1}}{1 - q} = 1 - q^{x-1}, \quad x = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

**Пример 3.** Петров после окончания ВУЗа пытается устроиться на вакантную должность, посылая последовательно свои резюме в различные компании до тех пор, пока не будет получен положительный ответ. Считая,

что вероятность устроиться на вакантную должность при каждой попытке составляет 5 %, найдем вероятность, того что Петров устроится на работу: с 6 раза; до четвертого раза.

**Решение.** Каждая попытка рассылки резюме является испытанием Бернулли с параметром  $p = 0,05$ . Рассмотрим случайную величину  $\xi$ , равную числу испытаний до первого успеха включительно, то есть  $\xi \in \text{Геом}(p = 0,05)$ . Тогда искомые вероятности событий равны:

$$P(\xi = 6) = q^5 p = 0,95^5 \cdot 0,05 \approx 0,0387;$$

$$P(\xi < 4) = P(\xi = 1) + P(\xi = 2) + P(\xi = 3) = p + qp + q^2 p = \\ = 0,05 + 0,95 \cdot 0,05 + 0,95^2 \cdot 0,05 \approx 0,143.$$

Очевидно, вторую вероятность можно вычислить иначе:

$$P(\xi < 4) = F_{\xi}(4) = 1 - q^{4-1} = 1 - 0,95^3 \approx 0,143..$$

**4. Дискретная случайная величина  $\xi$  *распределена по исключительному геометрическому закону* с параметром  $p$ , если она равна числу неудач до первого успеха в испытаниях Бернулли, то есть  $p_{\xi}(x) = P(\xi = x) = q^x p$ ,  $x = 0, 1, 2, \dots$ . Для нее будем использовать запись  $\xi \in \text{ИГ}(p)$ . Функция распределения  $\xi$  ступенчатая, непрерывная слева. Ее значения при натуральном аргументе находятся аналогично рассуждениям для геометрического закона и равны  $F_{\xi}(x) = 1 - q^x$ ,  $x = 0, 1, 2, \dots$ . Очевидна связь между геометрической и исключительной геометрической случайными величинами. Для наглядности запишем эту связь в виде  $\text{Геом}(p) = \text{ИГ}(p) + 1$ .**

**Пример 4.** В условиях примера 3 найдем вероятности, того что число безрезультатных рассылок резюме равно трем, не превосходит 3, и что Петров устроится на работу не раньше пятой попытки.

**Решение.** Эти вероятности, конечно, можно найти с помощью случайной величины из примера 3, но мы приведем альтернативный вариант решения и рассмотрим случайную величину  $\eta$  – число неудачных попыток рассылки резюме до занятия должности, то есть  $\eta \in \text{ИГ}(p = 0,05)$ . Тогда искомые вероятности событий равны:

$$P(\eta = 3) = q^3 p = 0,95^3 \cdot 0,05 \approx 0,043; P(\eta \leq 3) = P(\eta < 4) = F_{\eta}(4) = 1 - q^4 \approx 0,185.$$

Петров устроится на работу не раньше пятой попытки, если число неудачных рассылок больше, или равно четырем, тогда

$$P(\eta \geq 4) = 1 - P(\eta < 4) = 1 - F_{\eta}(4) \approx 1 - 0,185 = 0,815.$$

5. Дискретная случайная величина  $\xi$  **имеет распределение Паскаля**, с параметрами  $(k, p)$ , если она равна числу испытаний Бернулли до  $k$ -го успеха включительно, то есть  $p_{\xi}(x) = P(\xi = x) = C_{x-1}^{k-1} p^k q^{x-k}$ ,  $x = k, k+1, k+2, \dots$ ,

При  $k=1$  распределение Паскаля становится геометрическим, а при  $k > 1$   $\xi$  можно, очевидно, представить как сумму  $k$  независимых геометрических случайных величин.

6. Дискретная случайная величина  $\xi$  **имеет отрицательное биномиальное распределение** с параметрами  $(k, p)$ , если она равна числу неудач до  $k$ -го успеха в испытаниях Бернулли, то есть  $p_{\xi}(x) = P(\xi = x) = C_{k+x-1}^x p^k q^x$ ,  $x = 0, 1, 2, \dots$ .

При  $k=1$  распределение Паскаля становится исключительным геометрическим, а при  $k > 1$   $\xi$  можно, очевидно, представить как сумму  $k$  независимых исключительных геометрических случайных величин.

Между приведенными выше законами распределения есть и другие внутренние связи.

7. Рассмотрим урну с  $N$  шарами, из них  $M$  белых и  $N-M$  черных и выберем из нее без возвращения  $n$  шаров. Дискретная случайная величина  $\xi$ , равная числу белых шаров в таком наборе, **распределена по гипергеометрическому закону**, а именно,  $p_{\xi}(x) = P(\xi = x) = \frac{C_M^x \cdot C_{N-M}^{n-x}}{C_N^n}$ . Здесь все указанные

характеристики должны удовлетворять физическим ограничениям задачи.

**Пример 5.** В городе Энск имеется десять рекламных агентств. В четырех из них производят качественный рекламный продукт. Клиент обратился в три рекламные компании, выбранные им наудачу, для создания рекламы своих продуктов. Пусть  $\xi$  – случайная величина, равная числу рекламных агентств, которые качественно выполнили заказ этого клиента. Составьте закон распределения вероятностей случайной величины  $\xi$ .

**Решение.** Случайная величина  $\xi$  имеет следующие значения:  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = 2$ ,  $x_4 = 3$ . Запишем формулу для нахождения закона распределения

$$p_{\xi}(x) = P(\xi = x) = \frac{C_M^x \cdot C_{N-M}^{n-x}}{C_N^n},$$

где  $N = 10$  – всего имеющихся рекламных компаний;  $M = 4$  – количество качественно выполняющих рекламный контент компаний,  $x = 0, 1, 2, 3$  – число качественно выполнивших заказ рекламных компаний среди трех выбранных компаний ( $n = 3$ );

Вычисляем соответствующие вероятности:

$$p_{\xi}(0) = P(\xi = 0) = \frac{C_4^0 C_6^3}{C_{10}^3} = 1/6; \quad p_{\xi}(1) = P(\xi = 1) = \frac{C_4^1 C_6^2}{C_{10}^3} = 1/2;$$

$$p_{\xi}(2) = P(\xi = 2) = \frac{C_4^2 C_6^1}{C_{10}^3} = 3/10; \quad p_{\xi}(3) = P(\xi = 3) = \frac{C_4^3 C_6^0}{C_{10}^3} = 1/30.$$

Для проверки сложим вероятности:  $1/6 + 1/2 + 3/10 + 1/30 = 1$

Следовательно, искомый закон распределения имеет вид

|              |     |     |      |      |
|--------------|-----|-----|------|------|
| $x$          | 0   | 1   | 2    | 3    |
| $p_{\xi}(x)$ | 1/6 | 1/2 | 3/10 | 1/30 |

8. Дискретная случайная величина  $\xi$  *распределена по закону Пуассона* с параметром  $\lambda$  ( $\lambda > 0$ ), если она принимает целые неотрицательные значения с вероятностями  $p_{\xi}(x) = P(\xi = x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$ ,  $x = 0, 1, 2, \dots$ . Для нее будем использовать запись  $\xi \in \text{Пуас}(\lambda)$ .

Пуассоновское распределение возникает при исследовании числа поступивших заявок некоторого однородного потока интенсивности  $\lambda$ . Под интенсивностью потока понимается среднее число поступающих заявок за интересующий промежуток времени. Кроме того, в условиях теоремы Пуассона предельное поведение биномиального распределения становится пуассоновским с параметром  $\lambda = Np$ . Пуассоновское распределение применимо также в расчетах суммарных выплат по портфелю страховых договоров при краткосрочных рисковых схемах.

**Пример 6.** Официальный дилер компании утверждает, что число отказов при покупке автомобиля составляет 0,05 %. Считая, что число отказов имеет пуассоновское распределение, оцените вероятность того, что при покупке 4000 автомобилей откажутся затем от покупки и возвратят автомобиль 6 покупателям.

**Решение.** Формально в данном примере случайная величина  $\xi$  - число возвратов - имеет биномиальное распределение с параметрами  $N=4000$ ,  $p=0,0005$ , которое по условию предложено заменить предельным пуассоновским распределением. Поэтому используем для решения формулу:

$$p_{\xi}(x) = P(\xi = x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, \text{ где } \lambda = Np = 4000 \cdot 0,0005 = 2.$$

Вероятность того, что при покупке 4000 автомобилей откажутся затем от покупки и возвратят автомобиль 6 покупателей равна

$$P_{\xi}(6) = P(\xi = 6) = \frac{2^6}{6!} e^{-2} = 0,012.$$

**Замечание.** Для быстрого вычисления пуассоновских вероятностей удобно воспользоваться таблицей накопленного пуассоновского распределения из приложения, по которой проводим следующие расчеты

$$P(\xi = 6) = P(\xi \geq 6) - P(\xi \geq 7) = \sum_{x=6}^{\infty} \frac{2^x}{x!} e^{-2} - \sum_{x=7}^{\infty} \frac{2^x}{x!} e^{-2} = 0,017 - 0,005 = 0,012$$

**Пример 7.** Старшему администратору компании «Лук» за час поступает в среднем 120 различных запросов. Количество запросов имеет распределение Пуассона. Определите вероятности событий:  $A = \{\text{за данную минуту поступит больше 6 запросов}\}$ ,  $B = \{\text{за данную минуту поступит ровно 6 запросов}\}$ ,  $C = \{\text{за 2 минуты поступит менее 5 запросов}\}$ . Числовые расчеты проведите с помощью таблицы пуассоновского распределения в приложении.

**Решение.** Запросы образуют поток интенсивности  $\lambda = 120$  вызовов в час, то есть 2 вызова в минуту. Количество запросов в минуту является СВ  $\xi$  с пуассоновским распределением,  $\lambda = 2$ . Тогда, используя для числовых расчетов таблицу приложения, получим

$$P(A) = P(\xi > 6) = \sum_{x=7}^{+\infty} P(\xi = x) = \sum_{x=7}^{+\infty} \frac{2^x}{x!} e^{-2} = 0,005$$

$$P(B) = P(\xi = 6) = \frac{2^6}{6!} e^{-2} = \sum_{x=6}^{+\infty} \frac{2^x}{x!} e^{-2} - \sum_{x=7}^{+\infty} \frac{2^x}{x!} e^{-2} = 0,017 - 0,005 = 0,012$$

Чтобы найти вероятность события  $C$ , необходимо пересчитать интенсивность потока за интервал в 2 минуты. Она равна  $\lambda = 4$ .

Тогда аналогично предыдущему получаем

$$P(C) = 1 - \sum_{x=6}^{+\infty} \frac{4^x}{x!} e^{-4} = 1 - 0,215 = 0,785$$

**Пример 8.** Проводится контроль качества изготовленных на предприятии стиральных машин. Вероятность обнаружить бракованное изделие равна 0,0006. На распределительную базу поступила партия, содержащая 5000 изделий. Считая, что число бракованных единиц среди них имеет пуассоновское распределение, найдите вероятность того, что в указанной партии:

- 1) меньше 5 бракованных стиральных машин;
- 2) вероятность того, что бракованных изделий окажется от 3 до 6.

**Решение.** Обозначим через  $\xi$  количество бракованных машин в партии. Тогда, поскольку по условию  $\xi$  распределена по закону Пуассона, то вычисляем  $\lambda = Np = 5000 \cdot 0,0006 = 3$ , применяем формулу  $p_{\xi}(x) = P(\xi = x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$  и используем таблицу накопленного пуассоновского распределения из приложения при  $\lambda = 3$ . Первая вероятность равна

$$P(\xi < 5) = \sum_{x=0}^4 \frac{3^x}{x!} e^{-3} = 1 - P(\xi \geq 5) = 1 - \sum_{x=5}^{\infty} \frac{3^x}{x!} e^{-3} = 1 - 0,185 = 0,815$$

Найдем теперь вероятность, что бракованных изделий от 3 до 6.

$$P(3 \leq \xi \leq 6) = \sum_{x=3}^6 \frac{3^x}{x!} e^{-3} = \sum_{x=3}^{\infty} \frac{3^x}{x!} e^{-3} - \sum_{x=7}^{\infty} \frac{3^x}{x!} e^{-3} = 0,577 - 0,034 = 0,543.$$

Можно, конечно, вычислить и без таблицы приложения отдельные слагаемые в исходной сумме, но трудоемкость при этом увеличивается.

$$P(\xi = 3) = \frac{3^3}{3!} e^{-3} = 0,224; \quad P(\xi = 4) = \frac{3^4}{4!} e^{-3} = 0,168;$$

$$P(\xi = 5) = \frac{3^5}{5!} e^{-3} = 0,101; \quad P(\xi = 6) = \frac{3^6}{6!} e^{-3} = 0,05;$$

$$P(3 \leq \xi \leq 6) = 0,224 + 0,168 + 0,101 + 0,05 = 0,543.$$

Примерно 54 % вероятность обнаружить в указанной партии из 5000 стиральных от 3 до 6 бракованных изделий.

### **Примеры абсолютно непрерывных законов распределения.**

9. Случайная величина  $\xi$  имеет **равномерное на  $(a, b)$  распределение**, если

$$p_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 0, & x > b. \end{cases} \quad \text{Тогда}$$

$$F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^x p_{\xi}(u) du = \begin{cases} \int_{-\infty}^x 0 \cdot du = 0, & x \leq a \\ \int_{-\infty}^a 0 \cdot du + \int_a^x \frac{1}{b-a} du = \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b, \\ \int_{-\infty}^a 0 \cdot du + \int_a^b \frac{1}{b-a} du + \int_b^{+\infty} 0 \cdot du = 1, & x > b. \end{cases}$$

Для этого закона будем использовать запись  $\xi \in R(a, b)$ . Он возникает при описании ошибок округления случайных величин, а также при случайном розыгрыше точки из  $(a, b)$ .

**Пример 8.** Департамент транспорта утверждает, что электробусы следуют по маршруту с интервалом в 6 минут. Считая, что случайная величина  $\xi$  - время ожидания электробуса имеет равномерное распределение, Найдите:

- плотность и функцию распределения времени ожидания электробуса;
- вероятность того, что, ожидание электробуса меньше 2 минут;
- вероятность ожидания электробуса от 2 до 5 минут.

**Решение.** По условию  $\xi \in R(a, b)$ . Воспользовавшись общими формулами для равномерного закона при  $a = 0, b = 6$ , получим

$$p_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{1}{6-0} = \frac{1}{6}, & 0 < x < 6, \\ 0, & x \geq 6 \end{cases} \quad F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{x-0}{6-0} = \frac{x}{6}, & 0 < x < 6, \\ 1, & x \geq 6. \end{cases}$$

Далее, для вычисления искомых вероятностей можно использовать любой из двух алгоритмов, связанных со свойствами  $F_{\xi}(x)$  и  $p_{\xi}(x)$ .

$$P(\xi < 2) = F_{\xi}(2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \quad \text{или} \quad P(\xi < 2) = \int_0^2 \frac{1}{6} dx = \frac{1}{6} x \Big|_0^2 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},$$

$$P(2 \leq \xi \leq 5) = F_{\xi}(5) - F_{\xi}(2) = \frac{5}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{2}, \quad \text{или} \quad P(2 \leq \xi \leq 5) = \int_2^5 \frac{1}{6} dx = \frac{1}{6} x \Big|_2^5 = \frac{1}{2}.$$

**10.** Непрерывная случайная величина  $\xi$  **распределена по экспоненциальному (показательному) закону**, если

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0, \end{cases} \quad \text{то есть} \quad p_{\xi}(x) = F'_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0. \end{cases} \quad \text{Для нее будем}$$

использовать запись  $\xi \in \text{Экс}(\lambda)$ , параметр  $\lambda > 0$ .

Экспоненциальное распределение возникает при исследовании интервала между соседними заявками однородного потока, как время до поломки технических устройств, а также как продолжительность некоторых услуг.

**Пример 9.** Непрерывная случайная величина  $\xi$  задана своей плотностью.  $p_{\xi}(x) = F'_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ C e^{-0,1x}, & x > 0. \end{cases}$  Найдите константу  $C$  и функцию распределения вероятностей.

**Решение.** В силу С.1 плотности должно выполняться условие нормировки  $\int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi}(x)dx = 1$ . В нашем случае

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi}(x)dx = \int_{-\infty}^0 0dx + \int_0^{+\infty} C e^{-0,1x} dx = -\frac{C}{0,1} e^{-0,1x} \Big|_0^{+\infty} = \frac{C}{0,1} \Rightarrow C = 0,1. \text{ Итак,}$$

$p_{\xi}(x) = 0,1e^{-0,1x}$ ,  $x > 0$ . Это - плотность экспоненциального закона с параметром 0,1. Заметив это, можно сразу написать его функцию распределения  $F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1 - e^{-0,1x}, & x > 0 \end{cases}$ . Тем не менее, в учебных целях мы приведем ее непосредственное вычисление. Из С.2 плотности получаем

$$F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^x p_{\xi}(t)dt = \begin{cases} \int_{-\infty}^x 0dt = 0 & \text{при } x \leq 0, \\ \int_{-\infty}^0 0dt + \int_0^x 0,1e^{-0,1t} dt = -e^{-0,1t} \Big|_0^x = 1 - e^{-0,1x} & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

**Пример 10.** Считая, что время работы холодильника без поломок имеет экспоненциальное распределение с параметром 0,15, найдите вероятность того, что холодильник прослужит без ремонта не менее 8 лет.

**Решение.** По условию в краткой записи

$$p_{\xi}(x) = 0,15e^{-0,15x}, \quad x > 0 \quad F_{\xi}(x) = 1 - e^{-0,15x}, \quad x > 0.$$

Тогда  $P(\xi \geq 8) = 1 - F_{\xi}(8) = 1 - (1 - e^{-0,15 \cdot 8}) = e^{-1,2} \approx 0,301$ , или иначе

$$P(\xi \geq 8) = \int_8^{+\infty} 0,15e^{-0,15x} dx = -e^{-0,15x} \Big|_8^{+\infty} = 0 + e^{-1,2} \approx 0,301.$$

**11.** Непрерывная случайная величина  $\xi$  *распределена по нормальному закону* с параметрами распределения  $m$  и  $\sigma^2$  ( $m \in R, \sigma > 0$ ), если ее плотность распределения имеет вид

$$p_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right), \quad -\infty < x < +\infty.$$

Здесь дробь является степенью экспоненты. Будем использовать запись  $\xi \in N(m, \sigma^2)$ . Параметр  $m$  называется средним значением, или математическим ожиданием, или номиналом  $\xi$ , параметр  $\sigma^2$  называется дисперсией  $\xi$ ,  $\sigma$  называется среднеквадратическим отклонением, или стандартным отклонением  $\xi$ .

Нормальное распределение с параметрами  $m=0$  и  $\sigma=1$  называется **стандартным нормальным**. Его плотность равна  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ ,  $x \in R$ , а

функция распределения имеет вид  $\Phi(x) = P(\xi < x) = \int_{-\infty}^x \varphi(u) du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$  и

представляет собой не берущийся в элементарных функциях интеграл. Поэтому для получения его значений пользуются таблицей (см. в конце пособия). Помимо таблицы для  $\Phi(x)$ , которую мы будем в дальнейшем использовать, иногда пользуются таблицей для функции Лапласа, равной  $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$ . Она, в отличие от  $\Phi(x)$ , не имеет вероятностного смысла.

Для вычислений используют свойства.

**Свойства  $\Phi(x)$  и  $\Phi_0(x)$ :**

1.  $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ ,  $\Phi_0(-x) = -\Phi_0(x)$ .
2.  $\Phi(+\infty) = 1$ ,  $\Phi(-\infty) = 0$ ,  $\Phi_0(+\infty) = \frac{1}{2}$ ,  $\Phi_0(-\infty) = -\frac{1}{2}$ .
3.  $\Phi(x) = \Phi_0(x) + \frac{1}{2}$ .
4. Для  $\forall x_1, x_2$ :  $\Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1)$ .
5. Ввиду четности плотности  $\varphi(x)$ , квантили стандартной нормальной функции распределения  $\Phi(x)$  обладают свойством  $u_\alpha = -u_{1-\alpha}$ .

Сформулируем важное свойство, связывающее стандартное и нестандартное нормальное распределение

**Утверждение.**  $\xi \in N(m, \sigma^2)$  тогда и только тогда, когда  $\eta = \frac{\xi - m}{\sigma} \in N(0, 1)$ ,

причем

$$F_\xi(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right), \quad p_\xi(x) = \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right).$$

**Доказательство.** Проведем доказательство в одну сторону. Пусть

$\eta = \frac{\xi - m}{\sigma} \in N(0, 1)$ . Тогда при  $-\infty < x < +\infty$

$$F_\xi(x) = P(\xi < x) = P\left(\frac{\xi - m}{\sigma} < \frac{x - m}{\sigma}\right) = P\left(\eta < \frac{x - m}{\sigma}\right) = F_\eta\left(\frac{x - m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x - m}{\sigma}\right)$$

$$p_\xi(x) = F'_\xi(x) = \left[\Phi\left(\frac{x - m}{\sigma}\right)\right]' = \Phi'\left(\frac{x - m}{\sigma}\right) \cdot \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{x - m}{\sigma}\right)$$

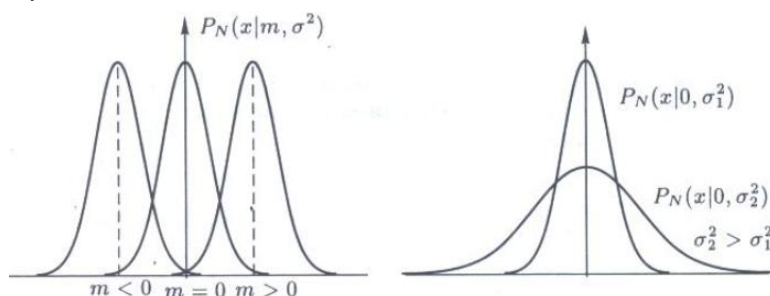
Следовательно, формулы утверждения доказаны. Продолжим последнее равенство

$$p_{\xi}(x) = \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Мы получили плотность закона  $N(m, \sigma^2)$ , то есть  $\xi \in N(m, \sigma^2)$ . Аналогично докажете сами утверждение в обратную сторону.

Доказанные формулы позволяют табулировать только стандартное нормальное распределение для числовых расчетов.

Приведем графики плотности нормального закона при разных значениях параметров.



Нормальное распределение имеет широкий спектр приложений. Оно появляется как предельное распределение суммы большого числа случайных величин, возникает в виде предельного поведения биномиального распределения (теоремы Муавра-Лапласа). Оно описывает реальные размеры производимой продукции, а также отклонение размера от номинала. Возникает при приближенном вычислении активов компании для обеспечения суммарных рискованных обязательств по краткосрочным страховым договорам. Многие физиологические показатели состояния человека и животных тоже имеют нормальное распределение.

**Пример 11.** Конвейер настроен на производство упаковок со средним диаметром 17 см и со стандартным отклонением равным 0,7 см. Диаметр подчиняется нормальному закону. Департамент технического контроля требует прекратить работу конвейера, если диаметр упаковки будет иметь более 19 см или менее 15 см. Найдите вероятность остановки конвейера департаментом технического контроля.

**Решение.** Диаметр является случайной величиной  $\xi \in N(m=17, \sigma^2=0.7^2)$ . Вычислим вероятность остановки конвейера, опираясь на вероятность противоположного события, затем воспользуемся соотношениями

$$F_{\xi}(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) \text{ и } \Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$

$$\begin{aligned} P(\xi < 15 \cup \xi > 19) &= 1 - P(15 \leq \xi \leq 19) = 1 - (F_{\xi}(19) - F_{\xi}(15)) = \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{19-m}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{15-m}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{19-17}{0,7}\right) + \Phi\left(\frac{15-17}{0,7}\right) \approx \\ &\approx 1 - \Phi(2,86) + \Phi(-2,86) = 1 - \Phi(2,86) + (1 - \Phi(2,86)) = 2(1 - \Phi(2,86)) \end{aligned}$$

Далее, из таблицы для  $\Phi(x)$  в приложении находим  $\Phi(2,86) = 0,9979$  и окончательно получаем, что вероятность остановки равна  $2(1 - \Phi(2,86)) = 2(1 - 0,9979) = 0,0042$ .

**Пример 12.** Какое должно быть стандартное отклонение в настройках конвейера из предыдущей задачи, чтобы вероятность остановки снизилась до 0,002?

**Решение.** В новой постановке задачи диаметр  $\xi \in N(m=17, \sigma^2 = ?)$ . Вернемся частично к прежним вычислениям, до того момента, когда возникнет  $\sigma$  и найдем  $\sigma$ , используя заданную вероятность остановки конвейера, равную 0,002.

$$\begin{aligned} P(\xi < 15 \cup \xi > 19) &= 1 - \Phi\left(\frac{19-m}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{15-m}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right) + \Phi\left(-\frac{2}{\sigma}\right) = \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right) + \left(1 - \Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)\right) = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)\right) \end{aligned} \quad \text{Получаем}$$

уравнение

$2\left(1 - \Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)\right) = 0,002 \Rightarrow \Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right) = 0,999 \Rightarrow \frac{1}{\sigma} = u_{0,999}$ . Внизу таблицы для  $\Phi(x)$  в приложении находим квантиль  $u_{0,999} = 3,09$  и получаем стандартное отклонение  $\sigma = \frac{1}{3,09} \approx 0,324$ .

Перейдем к так называемым «тяжелохвостым» непрерывным распределениям. Они имеют практическую значимость, когда допустимы заметные вероятности больших отклонений случайной величины от ее «типовых» значений. Они используются в теории массового обслуживания, в финансовой и страховой математике, в других прикладных дисциплинах, в некоторых технических процессах.

**Замечание.** Плотность и функция распределения всегда определены на всей числовой оси, но *обычно области, где плотность равна нулю, а функция распределения равна нулю или 1, не записывают, а указывают лишь точки носителя распределения, где  $p_{\xi}(x) > 0$* . Мы тоже будем так поступать.

## 12. Закон распределения Эрланга с параметрами $(\lambda, N)$ , $(\lambda > 0, N = 1, 2, \dots)$

. Его плотность распределения имеет вид  $p_{\xi}(x) = \frac{\lambda^N x^{N-1}}{(N-1)!} e^{-\lambda x}$ ,  $x > 0$ . Для него будем использовать запись  $\xi \in \text{Эрл}(\lambda, N)$ . Для вычисления функции распределения нужна соответствующая таблица. Экспоненциальное распределение является частным случаем закона Эрланга при  $N=1$ .

**Замечание.** Эрланговская случайная величина представима в виде суммы независимых экспоненциальных случайных величин:

$$\text{Эрл}(\lambda, N) = \text{Экс}_1(\lambda) + \text{Экс}_2(\lambda) + \dots + \text{Экс}_N(\lambda),$$

Отсюда вытекает ее прикладное применение.

## 13. Гамма-распределение с параметрами $(\lambda, c)$ , $(\lambda > 0, c > 0)$ . Для него будем использовать запись $\xi \in \Gamma(\lambda, c)$ . Его плотность имеет вид

$$p_{\xi}(x) = \frac{\lambda^c x^{c-1}}{\Gamma(c)} e^{-\lambda x}, \quad x > 0, \quad \text{где константа } \Gamma(c) = \int_0^{+\infty} t^{c-1} e^{-t} dt \text{ - гамма-функция в точке } c,$$

для вычисления которой существуют таблицы. Отметим некоторые свойства гамма-функции:  $\Gamma(0,5) = \sqrt{\pi}$ ,  $\Gamma(c+1) = c\Gamma(c)$ . Как следствие получаем, что при натуральном аргументе

$$\Gamma(N) = (N-1)\Gamma(N-1) = (N-1)(N-2)\Gamma(N-2) = \dots = (N-1)!.$$

Это очень емкий прикладной класс распределений. Закон распределения Эрланга является частным случаем гамма-распределения при  $c=N$ , а экспоненциальное распределение является частным случаем при  $c=1$ . Есть и другие частные случаи. Для вычисления функции распределения нужна соответствующая таблица.

## 14. Распределение Вейбулла-Гнеденко с параметрами $(\lambda, \alpha)$ , $(\lambda > 0, \alpha > 0)$ . Его плотность распределения имеет вид $p_{\xi}(x) = \alpha \lambda x^{\alpha-1} \exp^{-\lambda x^{\alpha}}$ , $x > 0$ . Для него будем использовать запись $\xi \in \text{Вейб}(\lambda, \alpha)$ . Получим в качестве упражнения функцию распределения

$$F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^x p_{\xi}(u) du = \begin{cases} \int_{-\infty}^x 0 du = 0, & x \leq 0 \\ \int_{-\infty}^x 0 du + \int_0^x \alpha \lambda u^{\alpha-1} e^{-\lambda u^{\alpha}} du = e^{-\lambda u^{\alpha}} \Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda x^{\alpha}}, & x > 0 \end{cases}$$

Распределение используется, например, для описания ресурса работы до отказа механических, электромеханических узлов и радиоэлектронной

аппаратуры. Используется как предельное распределение максимального замера в испытаниях.

**15. Распределение Парето** с параметрами  $(c, x_0)$ ,  $(c > 0, x_0 > 0)$ . Для него будем использовать запись  $\xi \in \text{Пар}(c, x_0)$ . Его функция распределения имеет

вид  $F_\xi(x) = 1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^c$ ,  $x > x_0$ . Тогда для плотности получаем

$$p_\xi(x) = F'_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_0 \\ cx_0^c / x^{c+1}, & x > x_0 \end{cases}.$$

Распределение Парето используется, например, для описания дохода лиц, облагаемых повышенным подоходным налогом.

Укажем в завершение параграфа два распределения, которые играют важную роль в математической статистике.

**16. Распределение  $\chi^2$  - Пирсона с  $N$  степенями свободы** имеет плотность

$$p_\xi(x) = \frac{1}{2^{N/2} \cdot \Gamma(N/2)} \cdot x^{N/2-1} \cdot e^{-x/2}, \quad x > 0, \quad N = 1, 2, \dots$$

Для него используется запись  $\xi \in \chi^2(N)$ . Оно является частным случаем гамма-распределения с параметрами  $(\lambda = 1/2, c = N/2)$ . Сумма квадратов  $N$  независимых стандартных нормальных СВ имеет это распределение.

**17. Распределение Стюдента с  $N$  степенями свободы**

имеет четную плотность вида

$$p_\xi(x) = \frac{\Gamma((N+1)/2)}{\Gamma(N/2)\sqrt{N\pi}} \left(1 + \frac{x^2}{N}\right)^{-(N+1)/2}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad N = 1, 2, \dots$$

Для него используется запись  $\xi \in St(N)$ . Оно связано с нормальным и  $\chi^2$ -распределением, а именно  $St(N) = \frac{N(0,1)}{\sqrt{\chi^2(N)/N}}$ , где числитель и знаменатель независимы.

Мы привели далеко не полный перечень типовых распределений и их связей, на знании которых основаны многие практические приложения.

#### § 4. Числовые характеристики случайных величин

Часто актуален не сам закон распределения случайной величины, а лишь некоторые связанные с ним числовые характеристики. Главные из них – математическое ожидание, дисперсия и среднеквадратическое отклонение. В случае случайного вектора появляются дополнительно ковариация,

коэффициент корреляции, условные математические ожидания. Для более краткого изложения и удобства доказательств мы введем понятие математического ожидания для функции от случайной величины и как следствие получим понятие математического ожидания случайной величины. Итак, рассмотрим случайную величину  $f(\xi)$ , которая является функцией от  $\xi$ , и случайную величину  $g(\xi, \eta)$ , которая является функцией от вектора  $(\xi, \eta)$ .

**Математическим ожиданием функции  $f(\xi)$  от случайной величины  $\xi$**  называется число

$$Mf(\xi) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)p_{\xi}(x)dx, & \text{если } \xi \text{ непрерывна,} \\ \sum_x f(x)p_{\xi}(x), & \text{если } \xi \text{ дискретна,} \end{cases} \quad (11)$$

если интеграл (сумма) сходится абсолютно.

Как следствие получаем определение.

**Математическим ожиданием случайной величины  $\xi$**  называется число

$$M\xi = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} xp_{\xi}(x)dx, & \text{если } \xi \text{ непрерывна,} \\ \sum_x xp_{\xi}(x), & \text{если } \xi \text{ дискретна,} \end{cases} \quad (12)$$

если интеграл (сумма) сходится абсолютно.

Математическое ожидание также **называется средним значением случайной величины**.

В случае расходимости интегралов (сумм) говорят, что математическое ожидание не существует.

#### **Свойства математического ожидания.**

Часть свойств примем без доказательства.

**М.1.** Математическое ожидание константы равно ей самой:  $Mc=c$ .

**Доказательство.** Константа является дискретной случайной величиной, принимающей одно значение  $c$  с вероятностью 1. Тогда по формуле (12)

$$M\xi = \sum_x xp_{\xi}(x) = c \cdot 1 = c.$$

**М.2.**  $M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta$ , если  $M\xi$  и  $M\eta$  существуют.

**М.3.** Константа выносится за знак математического ожидания:

$$M(c\xi) = cM\xi.$$

**Доказательство.** Используем определение (11) при  $f(\xi) = c\xi$  и возьмем для разнообразия вариант записи в непрерывном случае. Итак,

$$Mc\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} cx \cdot p_{\xi}(x) dx = c \int_{-\infty}^{+\infty} xp_{\xi}(x) dx = cM\xi.$$

**Следствие из М.2. и М.3.:** если существуют  $M\xi_1, M\xi_2, \dots, M\xi_n$ , то

$$M(c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \dots + c_n\xi_n) = c_1M\xi_1 + c_2M\xi_2 + \dots + c_nM\xi_n$$

**М.4.** Если  $\xi$  и  $\eta$  независимы и существуют  $M\xi$  и  $M\eta$ , то  $M(\xi \cdot \eta) = M\xi \cdot M\eta$ .

**М.5.**  $M(\xi - M\xi) = 0$ .

**Доказательство.** По свойствам М.1, М.2 и М.3 получаем  $M(\xi - M\xi) = M\xi - M(M\xi) = M\xi - M\xi = 0$ ,

Из этого свойства вытекает смысл понятия математического ожидания. Действительно, воспользуемся формулой (11) при  $f(\xi) = \xi - M\xi$ . Получим

$$0 = M(\xi - M\xi) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi) p_{\xi}(x) dx, & \text{если } \xi \text{ непрерывна,} \\ \sum_x (x - M\xi) p_{\xi}(x), & \text{если } \xi \text{ дискретна,} \end{cases}$$

Но  $(x - M\xi)$  является расстоянием между значением  $x$  случайной величины и точкой  $M\xi$ . Это расстояние умножено на «вес» значения  $x$  в виде вероятности или плотности в точке  $x$ , то есть образуется «момент силы». Свойство М.5 говорит о том, что  $M\xi$  является той точкой, относительно которой моменты сил тех  $x$ , которые лежат правее  $M\xi$ , уравновешиваются моментами сил тех  $x$ , которые лежат левее  $M\xi$ .

Второй важной числовой характеристикой случайной величины является дисперсия как показатель степени рассеяния значений случайной величины вокруг ее математического ожидания.

**Дисперсией случайной величины**  $\xi$  называется число  $D\xi = M(\xi - M\xi)^2$ , если существуют указанные математические ожидания.

По определению (11) при  $f(\xi) = (\xi - M\xi)^2$  получаем формулы для вычисления дисперсии

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^2 p_{\xi}(x) dx, & \text{если } \xi \text{ непрерывна,} \\ \sum_x (x - M\xi)^2 p_{\xi}(x), & \text{если } \xi \text{ дискретна.} \end{cases} \quad (13)$$

Дисперсию часто обозначают через  $\sigma^2$ .

**Среднеквадратическим отклонением случайной величины  $\xi$**  называется число  $\sigma = \sqrt{D\xi}$

### Свойства дисперсии.

$$D.1. D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p_{\xi}(x) dx - (M\xi)^2, & \text{если } \xi \text{ непрерывна,} \\ \sum_x x^2 p_{\xi}(x) - (M\xi)^2, & \text{если } \xi \text{ дискретна.} \end{cases} \quad (14)$$

**Доказательство.** Возведем в квадрат разность в формуле (13) и используем свойства математического ожидания М.1, М.2 и М.3.

$$D\xi = M(\xi^2 - 2\xi \cdot M\xi + (M\xi)^2) = M\xi^2 - 2M\xi \cdot M\xi + (M\xi)^2 = M\xi^2 - (M\xi)^2$$

Формулы в правой части (15) следуют из (11) при  $f(\xi) = \xi^2$ .

**D.2.**  $D\xi \geq 0$ ;  $D\xi = 0 \Leftrightarrow \xi = \text{const}$  с вероятностью 1.

**Доказательство.** Из (13) следует, что  $D\xi \geq 0$ . Докажем второе свойство. Предположим, что  $D\xi = 0$ , тогда в силу (13)  $P(\{x\} | (x - M\xi)^2 = 0) = 1$ , то есть  $\xi = M\xi = \text{const}$  с вероятностью 1.

В обратную сторону: пусть теперь  $\xi = c$ . Тогда по свойству М.1  $D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = M(c - Mc)^2 = M(c - c)^2 = 0$

**D.3.**  $D(c\xi) = c^2 D\xi$ .

**Доказательство.**  $D(c\xi) = M(c\xi - M(c\xi))^2 = M(c\xi - cM\xi)^2 =$   
 $= M(c(\xi - M\xi))^2 = M(c^2(\xi - M\xi)^2) = c^2 M((\xi - M\xi)^2) = c^2 D\xi$ .

**D.4.** Если  $\xi$  и  $\eta$  независимы, то  $D(\xi \pm \eta) = D\xi + D\eta$ .

**Доказательство.** Проведем выкладки для суммы, для разности они аналогичны.

$$\begin{aligned} D(\xi + \eta) & \stackrel{(14)}{=} M(\xi + \eta)^2 - (M(\xi + \eta))^2 \stackrel{(M2)}{=} M(\xi^2 + 2\xi\eta + \eta^2) - \\ & - (M\xi + M\eta)^2 \stackrel{(M2, M3)}{=} M\xi^2 + 2M(\xi\eta) + M\eta^2 - (M\xi)^2 - \\ & - 2M\xi \cdot M\eta - (M\eta)^2 \stackrel{(M4)}{=} M\xi^2 + 2M\xi \cdot M\eta + M\eta^2 - \\ & - (M\xi)^2 - 2M\xi \cdot M\eta - (M\eta)^2 \stackrel{(14)}{=} D\xi + D\eta \end{aligned}$$

Здесь сверху над равенствами стоят ссылки на уже доказанные результаты.

**Замечание.** Свойство D.4. выполняется не только для независимых случайных величин. Мы к этому вернемся позже.

Приведем примеры вычисления числовых характеристик для некоторых из приведенных ранее рабочих распределений.

**Пример 1.** Пусть дискретная случайная величина  $\xi \in \text{Бер}(p)$ . Тогда ее закон распределения имеет вид,

|              |             |     |
|--------------|-------------|-----|
| $x$          | 0           | 1   |
| $p_{\xi}(x)$ | $q = 1 - p$ | $p$ |

Тогда 
$$M_{\xi} = \sum_x x p_{\xi}(x) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p,$$

$$D_{\xi} = M_{\xi}^2 - (M_{\xi})^2 = \sum_x x^2 p_{\xi}(x) - (M_{\xi})^2 = 0^2 \cdot q + 1^2 \cdot p - p^2 = pq.$$

**Пример 2.** Пусть дискретная случайная величина  $\xi \in \text{Бин}(N, p)$ . Для вычисления ее числовых характеристик удобно воспользоваться ее представлением в виде суммы  $N$  независимых случайных величин с распределением Бернулли. Каждая из них отвечает за исход своего испытания. Мы об этом говорили в §3, когда вводили это распределение. Тогда по свойствам М.2 и D.4 его математическое ожидание и дисперсия тоже представимы в виде суммы математических ожиданий и дисперсий этих бернуллиевских случайных величин, то есть, с учетом примера 1, получаем  $M_{\xi} = Np$ ,  $D_{\xi} = Npq$ . Этот пример наглядно демонстрирует эффективность использования свойств математического ожидания, а не только его определения.

**Пример 3.** Получим математическое ожидание и дисперсию для нормального закона распределения. Сначала рассмотрим стандартную нормальную случайную величину  $\eta \in N(0,1)$  с плотностью вида

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in R. \quad \text{Тогда} \quad \text{в} \quad \text{силу} \quad (12)$$

$$M_{\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} d\left(\frac{x^2}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0.$$

Впрочем, это было ясно сразу, поскольку интеграл от нечетной функции в симметричных пределах равен нулю. Далее,

$$D_{\xi} = M_{\xi}^2 - (M_{\xi})^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx - 0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot x e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad \text{Интегрируем по частям}$$

$$u = x, \quad dv = x e^{-\frac{x^2}{2}} dx \Rightarrow du = dx, \quad v = -e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

$$\text{Тогда } D_{\xi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( -x e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right) = 0 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1,$$

так как последний интеграл является интегралом от плотности  $\varphi(x)$ .

Теперь перейдем к произвольной нормальной случайной величине  $\eta \in N(m, \sigma^2)$  и воспользуемся ранее доказанным в §3 утверждением, согласно которому  $\xi \in N(m, \sigma^2)$  тогда и только тогда, когда  $\eta = \frac{\xi - m}{\sigma} \in N(0,1)$ . Следовательно,  $\xi = \sigma\eta + m$ , а, значит, в силу свойств М.1-М.3 и D.2-D.4

$$M\xi = M(\sigma\eta + m) = \sigma \cdot M\eta + Mm = \sigma \cdot 0 + m = m,$$

$$D\xi = D(\sigma\eta + m) = \sigma^2 \cdot D\eta + Dm = \sigma^2 \cdot 1 + 0 = \sigma^2.$$

Мы получили, что математическое ожидание и дисперсия нормального закона совпадают с его параметрами.

**Пример 4.** Найдем математическое ожидание и дисперсию для экспоненциального распределения с плотностью вида.  $p_\xi(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ,  $x > 0$ , параметр  $\lambda > 0$ . Тогда, интегрируя по частям при  $u = x$ ,  $dv = \lambda e^{-\lambda x} dx$ , получаем

$$M\xi = \int_0^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = -x e^{-\lambda x} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -e^{-\lambda x} dx = 0 - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda},$$

Аналогично

$$\begin{aligned} M\xi^2 &= \int_0^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = -x^2 e^{-\lambda x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2x e^{-\lambda x} dx = \\ &= 0 + \frac{2}{\lambda} \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda} M\xi = \frac{2}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

$$\text{Теперь } D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Числовые характеристики некоторых других законов приведем как справочный материал без доказательства.

**Математическое ожидание и дисперсия геометрического распределения** равны:  $M\xi = \frac{1}{p}$ ,  $D\xi = \frac{1-p}{p^2}$ .

**Математическое ожидание и дисперсия исключительного геометрического распределения** равны:  $M\xi = \frac{1-p}{p}$ ,  $D\xi = \frac{1-p}{p^2}$ .

**Математическое ожидание и дисперсия распределения Паскаля** равны:  $M\xi = \frac{k}{p}$ ,  $D\xi = k \frac{1-p}{p^2}$ .

**Математическое ожидание и дисперсия отрицательного биномиального распределения** равны:  $M\xi = k \frac{1-p}{p}$ ,  $D\xi = k \frac{1-p}{p^2}$ .

**Математическое ожидание и дисперсия распределения Пуассона** равны:  $M\xi = \lambda$ ,  $D\xi = \lambda$ .

**Математическое ожидание и дисперсия распределения Парето** равны:  $M\xi = \frac{cx_0}{c-1}$ ,  $c > 1$ ;  $D\xi = \frac{cx_0^2}{(c-1)^2(c-2)}$ ,  $c > 2$ .

**Математическое ожидание и дисперсия гамма-распределения** равны:  $M\xi = \frac{c}{\lambda}$ ,  $D\xi = \frac{c}{\lambda^2}$ .

**Закон распределения Эрланга является частным случаем гамма-распределения при  $c=N$ , тогда для него**

$$M\xi = \frac{N}{\lambda}, \quad D\xi = \frac{N}{\lambda^2}.$$

**Распределение  $\chi^2$  Пирсона с  $N$  степенями свободы является частным случаем гамма-распределения с параметрами  $\lambda = 1/2, c = N/2$ , тогда для него**

$$M\xi = \frac{N/2}{1/2} = N, \quad D\xi = \frac{N/2}{1/4} = 2N.$$

## §6. Задания для самостоятельного решения.

1. Проводится эксперимент по испытанию новейшего вида вооружений «Орешек» путем двукратного пуска. Испытания считаются проведенными успешно, если цель будет поражена дважды подряд. Опишите пространство элементарных исходов.

2. В городе представлены три различные страховые компании «Инго», «Ресо», «Соглас». Каждая из компаний «Инго», «Ресо» и «Соглас» может выбрать одного из шести крупных автомобильных представителей. Выбор каждой компанией автомобильного представителя является равновероятным. Найдите вероятность, что все три страховые компании выбрали разных автомобильных представителей.

3. Завод производит однотипные станки, среди которых в среднем 7 % оказываются бракованными. Служба контроля проверяет изготовленную большую партию станков, выбрав 20 станков для анализа. Определите вероятность, что один станок будет бракованным. Числовые расчеты проведите с помощью таблицы биномиального распределения в приложении.

4. Фабрика произвела 110 упаковок, однако среди них 11 оказались с нечеткими контурами. Определите вероятность, что из выбранных для контроля 10 упаковок больше двух будут с нечеткими контурами. Для расчетов используйте таблицу биномиального распределения в приложении.

5. Строительная компания «ПИК» предполагает строительство пяти домов, расположенных в различных районах г. Москвы. Финансовые средства, для обеспечения строительства компания получает на основании эскроу счетов. Вероятность сформировать бюджет для постройки дома составляет 75 %. Запишите закон распределения случайной величины  $\xi$  - числа построенных домов. Найдите и постройте график функции распределения.

6. В ресторан «Сахалин» пришли четыре посетителя. Все они заказали одно и то же блюдо - гребешки с трюфельной приправой. Вероятность, того что блюдо не понравится составляет 5%. Запишите закон распределения случайной величины  $\xi$  - числа недовольных посетителей. Найдите и постройте график функции распределения.

7. Кондитерская фабрика при производстве конфет высшего качества «Аленка» допускает брак с вероятностью 4%. Служба проверки качества выпускаемой продукции случайным образом отбирает конфеты для проверки качества. Конфеты берут до тех пор, пока не будет взята конфета «Аленка» с браком. Запишите закон распределения случайной величины  $\xi$  - количества взятых конфет для проверки. Найдите и постройте график функции распределения.

8. В условия эксперимента из предыдущей задачи найдите закон распределения случайной величины  $\eta$  - количества качественных конфет, взятых для проверки. Найдите и постройте график функции распределения.

9. Фабрика «Скороход» выпускающая сапоги, производит продукцию, имеющую в среднем 8 % бракованных изделий. Приобрели 25 пар обуви фабрики «Скороход». Найти математическое ожидание  $M\xi$ , дисперсию  $D\xi$  и среднеквадратическое отклонение  $\sigma$  количества бракованных изделий среди купленных.

10. Среди клиентов банка в среднем порядка 16% не удовлетворены уровнем оказанных услуг. Найдите: закон и функцию распределения количества посетителей, не довольных уровнем обслуживания, среди четырех произвольно отобранных клиентов. Вычислите: математическое

ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

11. Среди клиентов банка «Звезда» обратившихся за получением кредита в среднем порядка только 20% получают одобрение в предоставление кредитных средств. Найдите: закон и функцию распределения количества клиентов получивших одобрение в предоставление кредитных средств, среди шести случайно выбранных лиц, обратившихся за получением кредита. Постройте график функции распределения. Вычислите: математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

12. Завод выпускает холодильники «Мороз». Вероятность появления брака на конвейере равна 0,03. Заключен контракт на поставку 100 холодильников. Считая, что число бракованных агрегатов среди них аппроксимируется пуассоновским распределением, найдите вероятность того, что в данной партии их будет меньше 3, больше 2

13. Возникающие неточности в финансовом отчете компании в процессе проверки образуют однородный поток. Количество неточностей в отчете является случайной величиной с пуассоновским распределением и средним значением, равным 4. Найдите первые 3 члена закона распределения этой величины и ее дисперсию.

14. В районе есть двенадцать фермеров. Пять из них производят качественный творог. Клиент обратился в три хозяйства, выбранные им наудачу, и купил творог. Пусть  $\xi$  – случайная величина, равная числу хозяйств, которые продали качественный творог клиенту. Составьте закон распределения вероятностей случайной величины  $\xi$ . Найдите функцию распределения и построьте ее график. Вычислите математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение числа добросовестных хозяйств среди выбранных покупателем.

15. Официальный дилер компании утверждает, что число отказов при покупке автомобиля составляет 0,8 %. Считая, что число отказов имеет пуассоновское распределение, оцените вероятность того, что при покупке 500 автомобилей откажутся затем от покупки и возвратят автомобиль 4 покупателя, меньше 5 покупателей, от 2 до 5 покупателей включительно.

16. Соискатель подготовился к сдаче теста на занимаемую должность, выучив 15 ответов из 18 представленных. Комиссия предлагает ему три теста для ответа, случайным образом отобранные из представленного списка. Постройте закон распределения случайной величины  $\xi$  -

количество верно решенных тестов претендентом на должность. Запишите и постройте функцию распределения случайной величины  $\xi$  - количество верно решенных тестов претендентом на должность. Найдите  $P(0 < \xi \leq 2)$ .

17. Страховой портфель компании «Инго» насчитывает 1500 автомобилей «Bentley». Полис Каско обходится каждому собственнику в год 160 000 рублей и в случае оформления убытка по Евро-протоколу собственник получает от страховой компании «Инго» 1500000 рублей. Считая, что вероятность оформления убытка по Евро-протоколу составляет 0,7 %, и что ежегодное количество оформлений протоколов имеет пуассоновское распределение, найдите вероятность того, что: 1) по истечении года работы страховая компания окажется в убытке; 2) прибыль компании окажется не меньше 20 000000 рублей.

18. Департамент транспорта утверждает, что электробусы следуют по маршруту с интервалом в 9 минут. Считая, что случайная величина  $\xi$  - время ожидания электробуса имеет равномерное распределение, Найдите:

- плотность и функцию распределения времени ожидания электробуса;
- вероятность того, что, ожидание электробуса меньше 4 минут;
- вероятность ожидания электробуса от 3 до 7 минут.

19. Известен закон распределения случайной величины  $\xi$ :

|              |     |     |     |     |
|--------------|-----|-----|-----|-----|
| $x_i$        | -2  | 0   | 1   | 3   |
| $p_\xi(x_i)$ | 0,1 | $p$ | 0,2 | 0,4 |

Определите недостающую вероятность  $p$ . Найдите функцию распределения  $F_\xi(x)$ , а также вычислите вероятности

1)  $P(\xi \leq 0)$ ; 2)  $P(-2 < \xi < 1)$ ; 3)  $P(-2 \leq \xi < 1)$ ; 4)  $P(\xi > 1)$ ;

Постройте график функции распределения.

20. Дан закон распределения случайной величины  $\xi$ :

|              |     |      |      |     |
|--------------|-----|------|------|-----|
| $x_i$        | -1  | 2    | 4    | 6   |
| $p_\xi(x_i)$ | 0,2 | 0,23 | 0,17 | $p$ |

Определите недостающую вероятность  $p$ . Найдите функцию распределения  $F_\xi(x)$ , а также вычислите вероятности:

1)  $P(\xi \leq 2)$ ; 2)  $P(1 < \xi < 5)$ ; 3)  $P(-2 \leq \xi < 4)$ ; 4)  $P(\xi > 4)$ ;

Постройте график функции распределения.

21. Автомобиль ожидает заправку у бензоколонки АЗС

«Роснефть» в среднем 7 минут. Считая случайную величину  $\xi$  - время ожидания заправки, распределенной по показательному закону, найти вероятность того, что ожидание заправки автомобилем будет составлять от 5 до 9 минут. Вычислите вероятность, что время ожидания превысит 11 минут

22. Автомобиль ожидает заправку у бензоколонки АЗС

«Лукойл» Считая случайную величину  $\xi$  – время ожидания заправки, распределенной по экспоненциальному закону с параметром 0,15, найти вероятность того, что ожидание заправки автомобилем будет составлять от 6 до 11 минут. Вычислите вероятность, что время ожидания превысит 12 минут. Найдите математическое ожидание  $\xi$ .

23. Перед посетителем расчетного центра в очереди три человека. Время обслуживания каждого – экспоненциально распределенная случайная величина с параметром 0,2. Найдите среднее время стояния в очереди этого посетителя. Найдите дисперсию этого времени.

*Подсказка.* Посмотрите замечание в §3 п.12 и пример 4 §5.

24. В задаче 25 Запишите плотность времени обслуживания посетителя.

*Подсказка.* Посмотрите замечание в §3 п.12 и пример 4 §5.

25. Время обслуживания на кассе каждого клиента в столовой имеет распределение Эрланга с параметром  $N = 3$ . Среднее время обслуживания равно 5 минутам. Запишите плотность времени обслуживания посетителя и найдите дисперсию и среднеквадратическое отклонение этого времени.

*Подсказка.* Посмотрите замечание в §3 п.12 и пример 4 §5.

26. Электропоезда «Ласточка» должны следовать согласно расписанию с интервалом в 15 минут. Считая, что случайная величина  $\xi$  – время ожидания электропоезда «Ласточка» на остановке – распределена равномерно на указанном интервале, найти среднее время ожидания и дисперсию времени ожидания.

27. Известна плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины  $\xi$

$$p_{\xi}(x) = \begin{cases} Cx^3, & \text{если } 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{если } x > 2 \end{cases}$$

Найти: а) константу  $C$ ; б)  $P(-3 \leq \xi \leq 1)$ ; в) функцию распределения  $F_{\xi}(x)$

.

28. Постройте закон распределения случайной величины  $\xi$ , если ее функция распределения равна

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq x \leq -4, \\ 1/3, & \text{если } -4 < x \leq -1, \\ 5/6, & \text{если } 0 \leq x \leq 4, \\ 11/12, & \text{если } 4 < x \leq 6, \\ 1, & \text{если } x > 6. \end{cases}$$

Найдите:  $P(\xi \leq -1)$ ,  $P(1 < \xi < 3)$ ,  $P(|\xi| \leq 2)$ ,  $P(2 < \xi \leq 4)$ .

29. Дана плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины  $\xi$

$$p_{\xi}(x) = \begin{cases} C \sin x, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & \text{если } x \notin [0, \pi] \end{cases}$$

Найти: а) константу  $C$ ; б)  $P\left(\frac{\pi}{3} \leq \xi \leq \frac{5\pi}{4}\right)$ ; в) функцию распределения

$F_{\xi}(x)$ ; г)  $M\xi$ ; д)  $D\xi$ .

30. Дана плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины  $\xi$

$$p_{\xi}(x) = \begin{cases} C/x^3, & \text{если } x > 3 \\ 0, & \text{если } x \leq 3 \end{cases}$$

Найти: а) константу  $C$ ; б)  $P(2 < \xi < 10)$ ; в) функцию распределения  $F_{\xi}(x)$ ; г)  $M\xi$ ; д)  $D\xi$ .

31. Дана плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины  $\xi$

$$p_{\xi}(x) = \begin{cases} Ce^{-3x}, & \text{если } x \geq 2 \\ 0, & \text{если } x < 2. \end{cases}$$

Найти: а) константу  $C$ ; б)  $P(|\xi| \leq 4)$ ; в) функцию распределения  $F_{\xi}(x)$ ; г)  $M\xi$ ; д)  $D\xi$ .

32. Дана функция распределения непрерывной случайной величины  $\xi$

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 3, \\ C(x-3)^2, & \text{если } 3 \leq x \leq 6, \\ 1, & \text{если } x > 6. \end{cases}$$

Найти: а) константу  $C$ ; б)  $P(|\xi| \leq 5)$ ; в)  $M\xi$ ; г)  $D\xi$ .

33. Дана функция распределения непрерывной случайной величины  $\xi$

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < -4, \\ x/8 + C, & \text{если } -4 \leq x \leq 4, \\ 1, & \text{если } x > 4. \end{cases}$$

Найти: а) константу  $C$ ; б)  $P(|\xi| \leq 2)$ ; в)  $M\xi$ ; г)  $D\xi$ .

34. Дана функция распределения непрерывной случайной величины  $\xi$

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < e, \\ \ln(Cx), & \text{если } 1 \leq x \leq e, \\ 1, & \text{если } x > e. \end{cases}$$

35. Случайная величина  $\xi$  распределена по стандартному нормальному закону. Найдите  $P(|\xi| < 2)$ ,  $P(0,65 < \xi < 4,5)$ , а также квантили  $u_{0,9}$ ,  $u_{0,1}$ ,  $u_{0,95}$ ,  $u_{0,8}$ ,  $u_{0,65}$ ,  $u_{35}$ . Используйте таблицу нормального закона в приложении.

36. Размер стеновых панелей, изготавливаемых строительным комбинатом, является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с математическим ожиданием 190 и средним квадратичным отклонением 4. Оцените вероятность, что размер стеновых панелей, изготавливаемых строительным комбинатом будет находиться в интервале (198; 203). Какую точность изготовления можно гарантировать с вероятностью 0,94?

37. Случайная величина  $\xi$  распределена по нормальному закону с математическим ожиданием 10 и среднеквадратическое отклонением 4. Найти  $P(1 < \xi < 12)$ .

38. Известно, что случайная величина  $\xi$  имеет нормальный закон распределения. Ее среднее значение 16, среднеквадратическое отклонение, равно 5. Постройте симметричный относительно математического ожидания интервал, в который с вероятностью 0,972 попадет случайная величина. Найти  $P(10 < \xi \leq 18)$ .

39. Размер шариков для автомобильных подшипников, изготавливаемых на заводе «Москвич» является случайной величиной, имеющей нормальный закон распределения. Среднее значение размера шариков равно 11 мм, а дисперсия равна  $0,81 \text{ мм}^2$ . Оцените вероятность того, что размер

шариков автомобильных подшипников, изготавливаемых на заводе «Москвич», будет находиться в интервале от 9 до 12. Какую точность изготовления гарантирует завод «Москвич» с вероятностью 0,9?

40. Известна плотность распределения случайной величины  $\xi$

$$p_{\xi}(x) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{18}}, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

1. Найдите математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение случайной величины. Найдите вероятность, что  $\xi$  будет находиться в интервале  $(-9; 7)$

2. Выполните те же задания, если  $p_{\xi}(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-3)^2}{50}}, \quad x \in (-\infty, +\infty)$

41. Импортный контейнер выгружают в порту «Новороссийск». Таможня приступает к контролю. Происходит взвешивание товара, причем известно, что взвешиваемый товар является случайной величиной, имеющей нормальный закон распределения. Среднее значение веса товара 240 кг, а дисперсия равна  $81 \text{ кг}^2$ . Найти вероятность того, что вес товара превысит 258 кг.

42. Кондитерский комбинат «Добрынинский» выпускает торт «Москва», имеющий среднюю массу 1,1 кг. Известно, что порядка 8% произведенных тортов «Москва» имеют массу меньше, чем 1 кг. Найдите какой процент тортов, произведенных на кондитерском комбинате имеет массу больше чем 1, 1 кг.

43. Доход индивидуального предпринимателя, облагаемый по повышенной налоговой ставке, имеет распределение Парето с параметрами  $c > 0$ ,  $x_0 = 20$  млн. (см. §3 п.15). Найдите среднее значение дохода и его дисперсию.

*Замечание.* Обратите внимание на особенности вычисления при разных  $c$ .

44. Годовой доход бизнесмена имеет распределение Парето с параметрами  $c = 2$ ,  $x_0 = 25$  млн. (см. §3 п.15). Найдите вероятность того, что его годовой доход превысит 50 млн., и вероятность, что он будет лежать в диапазоне от 50 до 75 млн.

45. Временной ресурс эксплуатации электромеханического оборудования до отказа имеет распределение Вейбулла-Гнеденко с параметрами  $\alpha = 2$ ,  $\lambda = 0,01$ . (см. §3 п.14). Найдите вероятности того, что оборудование проработает больше 8 лет и что выйдет из строя в течении 6 лет.

Приложение.

Таблица накопленного биномиального распределения

$$\sum_{k=r}^n C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

| p       | 0.01                                                                                        | 0.02                                                                                        | 0.03                                                                                        | 0.04                                                                                   | 0.05                                                                         | 0.06                                                               | 0.07                                                     | 0.08                                      | 0.09                                      | 0.10                                  | 0.15                                  | 0.20                             | 0.25                        | 0.30                   | 0.35              | 0.40         | 0.45    | 0.50 |
|---------|---------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|-------------------------------------------|-------------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------------|-----------------------------|------------------------|-------------------|--------------|---------|------|
| n= 2 r= | 1 .020 .040 .059 .078 .098 .116 .135 .154 .172 .190 .278 .360 .438 .510 .578 .640 .698 .750 | 2 .001 .002 .003 .004 .005 .006 .008 .010 .023 .040 .063 .090 .122 .160 .202 .250           |                                                                                             |                                                                                        |                                                                              |                                                                    |                                                          |                                           |                                           |                                       |                                       |                                  |                             |                        |                   |              |         |      |
| n= 5 r= | 1 .049 .096 .141 .185 .226 .266 .304 .341 .376 .410 .556 .672 .763 .832 .884 .922 .950 .969 | 2 .001 .004 .008 .015 .023 .032 .042 .054 .067 .081 .165 .263 .367 .472 .572 .663 .744 .813 | 3 .001 .001 .002 .003 .005 .006 .009 .027 .058 .104 .163 .235 .317 .407 .500                | 4 .002 .007 .016 .031 .054 .087 .131 .188                                              | 5 .001 .002 .005 .010 .018 .031                                              |                                                                    |                                                          |                                           |                                           |                                       |                                       |                                  |                             |                        |                   |              |         |      |
| n=10 r= | 1 .096 .183 .263 .335 .401 .461 .516 .566 .611 .651 .803 .893 .944 .972 .987 .994 .997 .999 | 2 .004 .016 .035 .058 .086 .118 .152 .188 .225 .264 .456 .624 .756 .851 .914 .954 .977 .989 | 3 .001 .003 .006 .012 .019 .028 .040 .054 .070 .180 .322 .474 .617 .738 .833 .900 .945      | 4 .001 .002 .004 .006 .009 .013 .050 .121 .224 .350 .486 .618 .734 .828                | 5 .001 .001 .002 .010 .033 .078 .150 .249 .367 .496 .623                     | 6 .001 .006 .020 .047 .095 .166 .262 .377                          | 7 .001 .004 .011 .026 .055 .102 .172                     | 8 .002 .005 .012 .027 .055                | 9 .001 .002 .005 .011                     | 10 .001                               |                                       |                                  |                             |                        |                   |              |         |      |
| n=20 r= | 1 .182 .332 .456 .558 .642 .710 .766 .811 .848 .878 .961 .988 .997 .999 1.00 1.00 1.00 1.00 | 2 .017 .060 .120 .190 .264 .340 .413 .483 .548 .608 .824 .931 .976 .992 .998 .999 1.00 1.00 | 3 .001 .007 .021 .044 .075 .115 .161 .212 .267 .323 .595 .794 .909 .965 .988 .996 .999 1.00 | 4 .001 .003 .007 .016 .029 .047 .071 .099 .133 .352 .589 .775 .893 .956 .984 .995 .999 | 5 .001 .003 .006 .011 .018 .029 .043 .170 .370 .585 .762 .882 .949 .981 .994 | 6 .001 .002 .004 .007 .011 .067 .196 .383 .584 .755 .874 .945 .979 | 7 .001 .001 .002 .022 .087 .214 .392 .583 .750 .870 .942 | 8 .006 .032 .102 .228 .399 .584 .748 .868 | 9 .001 .010 .041 .113 .238 .404 .586 .748 | 10 .003 .014 .048 .122 .245 .409 .588 | 11 .001 .004 .017 .053 .128 .249 .412 | 12 .001 .005 .020 .057 .131 .252 | 13 .001 .006 .021 .058 .132 | 14 .002 .006 .021 .058 | 15 .002 .006 .021 | 16 .002 .006 | 17 .001 |      |

|      |    |    |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|------|----|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| n=50 | r= | 1  | .395 | .636 | .782 | .870 | .923 | .955 | .973 | .985 | .991 | .995 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |
|      |    | 2  | .089 | .264 | .445 | .600 | .721 | .810 | .874 | .917 | .947 | .966 | .997 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |
|      |    | 3  | .014 | .078 | .189 | .323 | .459 | .584 | .689 | .774 | .839 | .888 | .986 | .999 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |
|      |    | 4  | .002 | .018 | .063 | .139 | .240 | .353 | .467 | .575 | .670 | .750 | .954 | .994 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |
|      |    | 5  |      | .003 | .017 | .049 | .104 | .179 | .271 | .371 | .472 | .569 | .888 | .982 | .998 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |
|      |    | 6  |      |      | .004 | .014 | .038 | .078 | .135 | .208 | .293 | .384 | .781 | .952 | .993 | .999 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |
|      |    | 7  |      |      |      | .001 | .004 | .012 | .029 | .058 | .102 | .160 | .230 | .639 | .897 | .981 | .998 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |
|      |    | 8  |      |      |      |      | .001 | .003 | .009 | .022 | .044 | .077 | .122 | .481 | .810 | .955 | .993 | .999 | 1.00 | 1.00 |
|      |    | 9  |      |      |      |      |      | .001 | .003 | .007 | .017 | .033 | .058 | .332 | .693 | .908 | .982 | .998 | 1.00 | 1.00 |
|      |    | 10 |      |      |      |      |      |      | .001 | .002 | .006 | .013 | .025 | .209 | .556 | .836 | .960 | .993 | .999 | 1.00 |
|      |    | 11 |      |      |      |      |      |      |      | .001 | .002 | .004 | .009 | .120 | .416 | .738 | .921 | .984 | .998 | 1.00 |
|      |    | 12 |      |      |      |      |      |      |      |      | .001 | .003 | .063 | .289 | .618 | .861 | .966 | .994 | .999 | 1.00 |
|      |    | 13 |      |      |      |      |      |      |      |      |      | .001 | .030 | .186 | .489 | .777 | .934 | .987 | .998 | 1.00 |
|      |    | 14 |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | .013 | .111 | .363 | .672 | .884 | .972 | .996 | 1.00 |
|      |    | 15 |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | .005 | .061 | .252 | .553 | .812 | .946 | .990 |
|      |    | 16 |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | .002 | .031 | .163 | .431 | .720 | .904 |
|      |    | 17 |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | .001 | .014 | .098 | .316 | .611 |
|      |    | 18 |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | .006 | .055 | .218 | .494 |
|      |    | 19 |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | .003 | .029 | .141 |
|      |    | 20 |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | .001 | .014 |
|      |    | 21 |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | .006 |
|      |    | 22 |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | .003 |
|      |    | 23 |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | .001 |
|      |    | 24 |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | .006 |
|      |    | 25 |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | .002 |
|      |    | 26 |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | .001 |
|      |    | 27 |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | .005 |
|      |    | 28 |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | .002 |
|      |    | 29 |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | .001 |
|      |    | 30 |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | .003 |
|      |    | 31 |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | .001 |
|      |    | 32 |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | .001 |
|      |    | 33 |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | .002 |
|      |    | 34 |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | .001 |
|      |    | 35 |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | .003 |

**Таблица накопленного пуассоновского распределения**  $\sum_{x=r}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$

| $\lambda$ | 0.10  | 0.20  | 0.30  | 0.40  | 0.50  | 0.60  | 0.70  | 0.80  | 0.90  | 1.00  |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $r=1$     | 0.095 | 0.181 | 0.259 | 0.330 | 0.393 | 0.451 | 0.503 | 0.551 | 0.593 | 0.632 |
| 2         | 0.005 | 0.018 | 0.037 | 0.062 | 0.090 | 0.122 | 0.156 | 0.191 | 0.228 | 0.264 |
| 3         |       | 0.001 | 0.004 | 0.008 | 0.014 | 0.023 | 0.034 | 0.047 | 0.063 | 0.080 |
| 4         |       |       |       | 0.001 | 0.002 | 0.003 | 0.006 | 0.009 | 0.013 | 0.019 |
| 5         |       |       |       |       |       |       | 0.001 | 0.001 | 0.002 | 0.004 |
| 6         |       |       |       |       |       |       |       |       |       | 0.001 |
| $\lambda$ | 1.10  | 1.20  | 1.30  | 1.40  | 1.50  | 1.60  | 1.70  | 1.80  | 1.90  | 2.00  |
| $r=1$     | 0.667 | 0.699 | 0.727 | 0.753 | 0.777 | 0.798 | 0.817 | 0.835 | 0.850 | 0.865 |
| 2         | 0.301 | 0.337 | 0.373 | 0.408 | 0.442 | 0.475 | 0.507 | 0.537 | 0.566 | 0.594 |
| 3         | 0.100 | 0.121 | 0.143 | 0.167 | 0.191 | 0.217 | 0.243 | 0.269 | 0.296 | 0.323 |
| 4         | 0.026 | 0.034 | 0.043 | 0.054 | 0.066 | 0.079 | 0.093 | 0.109 | 0.125 | 0.143 |
| 5         | 0.005 | 0.008 | 0.011 | 0.014 | 0.019 | 0.024 | 0.030 | 0.036 | 0.044 | 0.053 |
| 6         | 0.001 | 0.002 | 0.002 | 0.003 | 0.004 | 0.006 | 0.008 | 0.010 | 0.013 | 0.017 |
| 7         |       |       |       | 0.001 | 0.001 | 0.001 | 0.002 | 0.003 | 0.003 | 0.005 |
| 8         |       |       |       |       |       |       |       | 0.001 | 0.001 | 0.001 |
| $\lambda$ | 2.10  | 2.20  | 2.30  | 2.40  | 2.50  | 2.60  | 2.70  | 2.80  | 2.90  | 3.00  |
| $r=1$     | 0.878 | 0.889 | 0.900 | 0.909 | 0.918 | 0.926 | 0.933 | 0.939 | 0.945 | 0.950 |
| 2         | 0.620 | 0.645 | 0.669 | 0.692 | 0.713 | 0.733 | 0.751 | 0.769 | 0.785 | 0.801 |
| 3         | 0.350 | 0.377 | 0.404 | 0.430 | 0.456 | 0.482 | 0.506 | 0.531 | 0.554 | 0.577 |
| 4         | 0.161 | 0.181 | 0.201 | 0.221 | 0.242 | 0.264 | 0.286 | 0.308 | 0.330 | 0.353 |
| 5         | 0.062 | 0.072 | 0.084 | 0.096 | 0.109 | 0.123 | 0.137 | 0.152 | 0.168 | 0.185 |
| 6         | 0.020 | 0.025 | 0.030 | 0.036 | 0.042 | 0.049 | 0.057 | 0.065 | 0.074 | 0.084 |
| 7         | 0.006 | 0.007 | 0.009 | 0.012 | 0.014 | 0.017 | 0.021 | 0.024 | 0.029 | 0.034 |
| 8         | 0.001 | 0.002 | 0.003 | 0.003 | 0.004 | 0.005 | 0.007 | 0.008 | 0.010 | 0.012 |
| 9         |       |       | 0.001 | 0.001 | 0.001 | 0.001 | 0.002 | 0.002 | 0.003 | 0.004 |
| 10        |       |       |       |       |       |       | 0.001 | 0.001 | 0.001 | 0.001 |

| $\lambda$      |    | 3.10  | 3.20  | 3.30  | 3.40  | 3.50  | 3.60  | 3.70  | 3.80  | 3.90  | 4.00  |
|----------------|----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\overline{u}$ | 1  | 0.955 | 0.959 | 0.963 | 0.967 | 0.970 | 0.973 | 0.975 | 0.978 | 0.980 | 0.982 |
|                | 2  | 0.815 | 0.829 | 0.841 | 0.853 | 0.864 | 0.874 | 0.884 | 0.893 | 0.901 | 0.908 |
|                | 3  | 0.599 | 0.620 | 0.641 | 0.660 | 0.679 | 0.697 | 0.715 | 0.731 | 0.747 | 0.762 |
|                | 4  | 0.375 | 0.397 | 0.420 | 0.442 | 0.463 | 0.485 | 0.506 | 0.527 | 0.547 | 0.567 |
|                | 5  | 0.202 | 0.219 | 0.237 | 0.256 | 0.275 | 0.294 | 0.313 | 0.332 | 0.352 | 0.371 |
|                | 6  | 0.094 | 0.105 | 0.117 | 0.129 | 0.142 | 0.156 | 0.170 | 0.184 | 0.199 | 0.215 |
|                | 7  | 0.039 | 0.045 | 0.051 | 0.058 | 0.065 | 0.073 | 0.082 | 0.091 | 0.101 | 0.111 |
|                | 8  | 0.014 | 0.017 | 0.020 | 0.023 | 0.027 | 0.031 | 0.035 | 0.040 | 0.045 | 0.051 |
|                | 9  | 0.005 | 0.006 | 0.007 | 0.008 | 0.010 | 0.012 | 0.014 | 0.016 | 0.019 | 0.021 |
|                | 10 | 0.001 | 0.002 | 0.002 | 0.003 | 0.003 | 0.004 | 0.005 | 0.006 | 0.007 | 0.008 |
|                | 11 |       |       | 0.001 | 0.001 | 0.001 | 0.001 | 0.002 | 0.002 | 0.002 | 0.003 |
|                | 12 |       |       |       |       |       |       |       | 0.001 | 0.001 | 0.001 |

| $\lambda$      |    | 4.10  | 4.20  | 4.30  | 4.40  | 4.50  | 4.60  | 4.70  | 4.80  | 4.90  | 5.00  |
|----------------|----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\overline{u}$ | 1  | 0.983 | 0.985 | 0.986 | 0.988 | 0.989 | 0.990 | 0.991 | 0.992 | 0.993 | 0.993 |
|                | 2  | 0.915 | 0.922 | 0.928 | 0.934 | 0.939 | 0.944 | 0.948 | 0.952 | 0.956 | 0.960 |
|                | 3  | 0.776 | 0.790 | 0.803 | 0.815 | 0.826 | 0.837 | 0.848 | 0.857 | 0.867 | 0.875 |
|                | 4  | 0.586 | 0.605 | 0.623 | 0.641 | 0.658 | 0.674 | 0.690 | 0.706 | 0.721 | 0.735 |
|                | 5  | 0.391 | 0.410 | 0.430 | 0.449 | 0.468 | 0.487 | 0.505 | 0.524 | 0.542 | 0.560 |
|                | 6  | 0.231 | 0.247 | 0.263 | 0.280 | 0.297 | 0.314 | 0.332 | 0.349 | 0.366 | 0.384 |
|                | 7  | 0.121 | 0.133 | 0.144 | 0.156 | 0.169 | 0.182 | 0.195 | 0.209 | 0.223 | 0.238 |
|                | 8  | 0.057 | 0.064 | 0.071 | 0.079 | 0.087 | 0.095 | 0.104 | 0.113 | 0.123 | 0.133 |
|                | 9  | 0.024 | 0.028 | 0.032 | 0.036 | 0.040 | 0.045 | 0.050 | 0.056 | 0.062 | 0.068 |
|                | 10 | 0.010 | 0.011 | 0.013 | 0.015 | 0.017 | 0.020 | 0.022 | 0.025 | 0.028 | 0.032 |
|                | 11 | 0.003 | 0.004 | 0.005 | 0.006 | 0.007 | 0.008 | 0.009 | 0.010 | 0.012 | 0.014 |
|                | 12 | 0.001 | 0.001 | 0.002 | 0.002 | 0.002 | 0.003 | 0.003 | 0.004 | 0.005 | 0.005 |

| $\lambda$      |    | 5.20  | 5.40  | 5.60  | 5.80  | 6.00  | 6.20  | 6.40  | 6.60  | 6.80  | 7.00  |
|----------------|----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\overline{u}$ | 1  | 0.994 | 0.995 | 0.996 | 0.997 | 0.998 | 0.998 | 0.998 | 0.999 | 0.999 | 0.999 |
|                | 2  | 0.966 | 0.971 | 0.976 | 0.979 | 0.983 | 0.985 | 0.988 | 0.990 | 0.991 | 0.993 |
|                | 3  | 0.891 | 0.905 | 0.918 | 0.928 | 0.938 | 0.946 | 0.954 | 0.960 | 0.966 | 0.970 |
|                | 4  | 0.762 | 0.787 | 0.809 | 0.830 | 0.849 | 0.866 | 0.881 | 0.895 | 0.907 | 0.918 |
|                | 5  | 0.594 | 0.627 | 0.658 | 0.687 | 0.715 | 0.741 | 0.765 | 0.787 | 0.808 | 0.827 |
|                | 6  | 0.419 | 0.454 | 0.488 | 0.522 | 0.554 | 0.586 | 0.616 | 0.645 | 0.673 | 0.699 |
|                | 7  | 0.268 | 0.298 | 0.330 | 0.362 | 0.394 | 0.426 | 0.458 | 0.489 | 0.520 | 0.550 |
|                | 8  | 0.155 | 0.178 | 0.203 | 0.229 | 0.256 | 0.284 | 0.313 | 0.342 | 0.372 | 0.401 |
|                | 9  | 0.082 | 0.097 | 0.114 | 0.133 | 0.153 | 0.174 | 0.197 | 0.220 | 0.245 | 0.271 |
|                | 10 | 0.040 | 0.049 | 0.059 | 0.071 | 0.084 | 0.098 | 0.114 | 0.131 | 0.150 | 0.170 |
|                | 11 | 0.018 | 0.023 | 0.028 | 0.035 | 0.043 | 0.051 | 0.061 | 0.073 | 0.085 | 0.099 |
|                | 12 | 0.007 | 0.010 | 0.012 | 0.016 | 0.020 | 0.025 | 0.031 | 0.037 | 0.045 | 0.053 |
|                | 13 | 0.003 | 0.004 | 0.005 | 0.007 | 0.009 | 0.011 | 0.014 | 0.018 | 0.022 | 0.027 |
|                | 14 | 0.001 | 0.001 | 0.002 | 0.003 | 0.004 | 0.005 | 0.006 | 0.008 | 0.010 | 0.013 |
|                | 15 |       |       | 0.001 | 0.001 | 0.001 | 0.002 | 0.003 | 0.003 | 0.004 | 0.006 |

| $\lambda$ | 7.20  | 7.40  | 7.60  | 7.80  | 8.00  | 8.20  | 8.40  | 8.60  | 8.80  | 9.00  |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1         | 0.999 | 0.999 | 0.999 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 |
| 2         | 0.994 | 0.995 | 0.996 | 0.996 | 0.997 | 0.997 | 0.998 | 0.998 | 0.999 | 0.999 |
| 3         | 0.975 | 0.978 | 0.981 | 0.984 | 0.986 | 0.988 | 0.990 | 0.991 | 0.993 | 0.994 |
| 4         | 0.928 | 0.937 | 0.945 | 0.952 | 0.958 | 0.963 | 0.968 | 0.972 | 0.976 | 0.979 |
| 5         | 0.844 | 0.860 | 0.875 | 0.888 | 0.900 | 0.911 | 0.921 | 0.930 | 0.938 | 0.945 |
| 6         | 0.724 | 0.747 | 0.769 | 0.790 | 0.809 | 0.826 | 0.843 | 0.858 | 0.872 | 0.884 |
| 7         | 0.580 | 0.608 | 0.635 | 0.662 | 0.687 | 0.710 | 0.733 | 0.754 | 0.774 | 0.793 |
| 8         | 0.431 | 0.461 | 0.490 | 0.519 | 0.547 | 0.575 | 0.601 | 0.627 | 0.652 | 0.676 |
| 9         | 0.297 | 0.324 | 0.352 | 0.380 | 0.407 | 0.435 | 0.463 | 0.491 | 0.518 | 0.544 |
| 10        | 0.190 | 0.212 | 0.235 | 0.259 | 0.283 | 0.308 | 0.334 | 0.360 | 0.386 | 0.413 |
| 11        | 0.113 | 0.129 | 0.146 | 0.165 | 0.184 | 0.204 | 0.226 | 0.248 | 0.271 | 0.294 |
| 12        | 0.063 | 0.074 | 0.085 | 0.098 | 0.112 | 0.127 | 0.143 | 0.160 | 0.178 | 0.197 |
| 13        | 0.033 | 0.039 | 0.046 | 0.055 | 0.064 | 0.074 | 0.085 | 0.097 | 0.110 | 0.124 |
| 14        | 0.016 | 0.020 | 0.024 | 0.029 | 0.034 | 0.040 | 0.048 | 0.055 | 0.064 | 0.074 |
| 15        | 0.007 | 0.009 | 0.011 | 0.014 | 0.017 | 0.021 | 0.025 | 0.030 | 0.035 | 0.041 |
| 16        | 0.003 | 0.004 | 0.005 | 0.007 | 0.008 | 0.010 | 0.013 | 0.015 | 0.018 | 0.022 |
| 17        | 0.001 | 0.002 | 0.002 | 0.003 | 0.004 | 0.005 | 0.006 | 0.007 | 0.009 | 0.011 |

| $\lambda$ | 9.20  | 9.40  | 9.60  | 9.80  | 10.00 | 11.00 | 12.00 | 13.00 | 14.00 | 15.00 |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1         | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 |
| 2         | 0.999 | 0.999 | 0.999 | 0.999 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 |
| 3         | 0.995 | 0.995 | 0.996 | 0.997 | 0.997 | 0.999 | 0.999 | 1.000 | 1.000 | 1.000 |
| 4         | 0.982 | 0.984 | 0.986 | 0.988 | 0.990 | 0.995 | 0.998 | 0.999 | 1.000 | 1.000 |
| 5         | 0.951 | 0.957 | 0.962 | 0.967 | 0.971 | 0.985 | 0.992 | 0.996 | 0.998 | 0.999 |
| 6         | 0.896 | 0.907 | 0.916 | 0.925 | 0.933 | 0.962 | 0.980 | 0.989 | 0.994 | 0.997 |
| 7         | 0.811 | 0.827 | 0.843 | 0.857 | 0.870 | 0.921 | 0.954 | 0.974 | 0.986 | 0.992 |
| 8         | 0.699 | 0.721 | 0.742 | 0.761 | 0.780 | 0.857 | 0.910 | 0.946 | 0.968 | 0.982 |
| 9         | 0.570 | 0.596 | 0.620 | 0.644 | 0.667 | 0.768 | 0.845 | 0.900 | 0.938 | 0.963 |
| 10        | 0.439 | 0.465 | 0.491 | 0.517 | 0.542 | 0.659 | 0.758 | 0.834 | 0.891 | 0.930 |
| 11        | 0.318 | 0.342 | 0.367 | 0.392 | 0.417 | 0.540 | 0.653 | 0.748 | 0.824 | 0.882 |
| 12        | 0.217 | 0.237 | 0.259 | 0.281 | 0.303 | 0.421 | 0.538 | 0.647 | 0.740 | 0.815 |
| 13        | 0.139 | 0.155 | 0.172 | 0.190 | 0.208 | 0.311 | 0.424 | 0.537 | 0.642 | 0.732 |
| 14        | 0.084 | 0.096 | 0.108 | 0.121 | 0.136 | 0.219 | 0.318 | 0.427 | 0.536 | 0.637 |
| 15        | 0.048 | 0.056 | 0.064 | 0.073 | 0.083 | 0.146 | 0.228 | 0.325 | 0.430 | 0.534 |
| 16        | 0.026 | 0.031 | 0.036 | 0.042 | 0.049 | 0.093 | 0.156 | 0.236 | 0.331 | 0.432 |
| 17        | 0.013 | 0.016 | 0.019 | 0.023 | 0.027 | 0.056 | 0.101 | 0.165 | 0.244 | 0.336 |
| 18        | 0.007 | 0.008 | 0.010 | 0.012 | 0.014 | 0.032 | 0.063 | 0.110 | 0.173 | 0.251 |
| 19        | 0.003 | 0.004 | 0.005 | 0.006 | 0.007 | 0.018 | 0.037 | 0.070 | 0.117 | 0.181 |
| 20        | 0.001 | 0.002 | 0.002 | 0.003 | 0.003 | 0.009 | 0.021 | 0.043 | 0.077 | 0.125 |
| 21        | 0.001 | 0.001 | 0.001 | 0.001 | 0.002 | 0.005 | 0.012 | 0.025 | 0.048 | 0.083 |
| 22        |       |       |       | 0.001 | 0.001 | 0.002 | 0.006 | 0.014 | 0.029 | 0.053 |
| 23        |       |       |       |       |       | 0.001 | 0.003 | 0.008 | 0.017 | 0.033 |

| Стандартная нормальная плотность $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \varphi(-x) = \varphi(x)$ |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| x                                                                                                                  | 0      | 0,01   | 0,02   | 0,03   | 0,04   | 0,05   | 0,06   | 0,07   | 0,08   | 0,09   |
| 0                                                                                                                  | 0,3989 | 0,3989 | 0,3989 | 0,3988 | 0,3986 | 0,3984 | 0,3982 | 0,3980 | 0,3977 | 0,3973 |
| 0,1                                                                                                                | 0,3970 | 0,3965 | 0,3961 | 0,3956 | 0,3950 | 0,3945 | 0,3939 | 0,3932 | 0,3925 | 0,3918 |
| 0,2                                                                                                                | 0,3910 | 0,3902 | 0,3894 | 0,3885 | 0,3876 | 0,3867 | 0,3857 | 0,3847 | 0,3836 | 0,3825 |
| 0,3                                                                                                                | 0,3814 | 0,3802 | 0,3790 | 0,3778 | 0,3765 | 0,3752 | 0,3739 | 0,3725 | 0,3712 | 0,3697 |
| 0,4                                                                                                                | 0,3683 | 0,3668 | 0,3653 | 0,3637 | 0,3621 | 0,3605 | 0,3589 | 0,3572 | 0,3555 | 0,3538 |
| 0,5                                                                                                                | 0,3521 | 0,3503 | 0,3485 | 0,3467 | 0,3448 | 0,3429 | 0,3410 | 0,3391 | 0,3372 | 0,3352 |
| 0,6                                                                                                                | 0,3332 | 0,3312 | 0,3292 | 0,3271 | 0,3251 | 0,3230 | 0,3209 | 0,3187 | 0,3166 | 0,3144 |
| 0,7                                                                                                                | 0,3123 | 0,3101 | 0,3078 | 0,3056 | 0,3034 | 0,3011 | 0,2989 | 0,2966 | 0,2943 | 0,2920 |
| 0,8                                                                                                                | 0,2897 | 0,2874 | 0,2850 | 0,2827 | 0,2803 | 0,2780 | 0,2756 | 0,2732 | 0,2709 | 0,2685 |
| 0,9                                                                                                                | 0,2661 | 0,2637 | 0,2613 | 0,2589 | 0,2565 | 0,2541 | 0,2516 | 0,2492 | 0,2468 | 0,2444 |
| 1                                                                                                                  | 0,2420 | 0,2395 | 0,2371 | 0,2347 | 0,2323 | 0,2299 | 0,2275 | 0,2251 | 0,2227 | 0,2202 |
| 1,1                                                                                                                | 0,2179 | 0,2155 | 0,2131 | 0,2107 | 0,2083 | 0,2059 | 0,2036 | 0,2012 | 0,1989 | 0,1965 |
| 1,2                                                                                                                | 0,1942 | 0,1919 | 0,1895 | 0,1872 | 0,1849 | 0,1826 | 0,1804 | 0,1781 | 0,1758 | 0,1736 |
| 1,3                                                                                                                | 0,1714 | 0,1691 | 0,1669 | 0,1647 | 0,1626 | 0,1604 | 0,1582 | 0,1561 | 0,1539 | 0,1518 |
| 1,4                                                                                                                | 0,1497 | 0,1476 | 0,1456 | 0,1435 | 0,1415 | 0,1394 | 0,1374 | 0,1354 | 0,1334 | 0,1315 |
| 1,5                                                                                                                | 0,1295 | 0,1276 | 0,1257 | 0,1238 | 0,1219 | 0,1200 | 0,1182 | 0,1163 | 0,1145 | 0,1127 |
| 1,6                                                                                                                | 0,1109 | 0,1092 | 0,1074 | 0,1057 | 0,1040 | 0,1023 | 0,1006 | 0,0989 | 0,0973 | 0,0957 |
| 1,7                                                                                                                | 0,0940 | 0,0925 | 0,0909 | 0,0893 | 0,0878 | 0,0863 | 0,0848 | 0,0833 | 0,0818 | 0,0804 |
| 1,8                                                                                                                | 0,0789 | 0,0775 | 0,0761 | 0,0748 | 0,0734 | 0,0721 | 0,0707 | 0,0694 | 0,0681 | 0,0669 |
| 1,9                                                                                                                | 0,0656 | 0,0644 | 0,0632 | 0,0620 | 0,0608 | 0,0596 | 0,0584 | 0,0573 | 0,0562 | 0,0551 |
| 2                                                                                                                  | 0,0540 | 0,0529 | 0,0519 | 0,0508 | 0,0498 | 0,0488 | 0,0478 | 0,0468 | 0,0459 | 0,0449 |
| 2,1                                                                                                                | 0,0440 | 0,0431 | 0,0422 | 0,0413 | 0,0404 | 0,0395 | 0,0387 | 0,0379 | 0,0371 | 0,0363 |
| 2,2                                                                                                                | 0,0355 | 0,0347 | 0,0339 | 0,0332 | 0,0325 | 0,0317 | 0,0310 | 0,0303 | 0,0297 | 0,0290 |
| 2,3                                                                                                                | 0,0283 | 0,0277 | 0,0270 | 0,0264 | 0,0258 | 0,0252 | 0,0246 | 0,0241 | 0,0235 | 0,0229 |
| 2,4                                                                                                                | 0,0224 | 0,0219 | 0,0213 | 0,0208 | 0,0203 | 0,0198 | 0,0194 | 0,0189 | 0,0184 | 0,0180 |
| 2,5                                                                                                                | 0,0175 | 0,0171 | 0,0167 | 0,0163 | 0,0158 | 0,0154 | 0,0151 | 0,0147 | 0,0143 | 0,0139 |
| 2,6                                                                                                                | 0,0136 | 0,0132 | 0,0129 | 0,0126 | 0,0122 | 0,0119 | 0,0116 | 0,0113 | 0,0110 | 0,0107 |
| 2,7                                                                                                                | 0,0104 | 0,0101 | 0,0099 | 0,0096 | 0,0093 | 0,0091 | 0,0088 | 0,0086 | 0,0084 | 0,0081 |
| 2,8                                                                                                                | 0,0079 | 0,0077 | 0,0075 | 0,0073 | 0,0071 | 0,0069 | 0,0067 | 0,0065 | 0,0063 | 0,0061 |
| 2,9                                                                                                                | 0,0060 | 0,0058 | 0,0056 | 0,0055 | 0,0053 | 0,0051 | 0,0050 | 0,0048 | 0,0047 | 0,0046 |
| 3                                                                                                                  | 0,0044 | 0,0043 | 0,0042 | 0,0040 | 0,0039 | 0,0038 | 0,0037 | 0,0036 | 0,0035 | 0,0034 |
| 3,1                                                                                                                | 0,0033 | 0,0032 | 0,0031 | 0,0030 | 0,0029 | 0,0028 | 0,0027 | 0,0026 | 0,0025 | 0,0025 |
| 3,2                                                                                                                | 0,0024 | 0,0023 | 0,0022 | 0,0022 | 0,0021 | 0,0020 | 0,0020 | 0,0019 | 0,0018 | 0,0018 |
| 3,3                                                                                                                | 0,0017 | 0,0017 | 0,0016 | 0,0016 | 0,0015 | 0,0015 | 0,0014 | 0,0014 | 0,0013 | 0,0013 |
| 3,4                                                                                                                | 0,0012 | 0,0012 | 0,0012 | 0,0011 | 0,0011 | 0,0010 | 0,0010 | 0,0010 | 0,0009 | 0,0009 |
| 3,5                                                                                                                | 0,0009 | 0,0008 | 0,0008 | 0,0008 | 0,0008 | 0,0007 | 0,0007 | 0,0007 | 0,0007 | 0,0006 |
| 3,6                                                                                                                | 0,0006 | 0,0006 | 0,0006 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0004 |
| 3,7                                                                                                                | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 |
| 3,8                                                                                                                | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 |

**Стандартная нормальная функция распределения**  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

| x                                         | 0      | 0,01   | 0,02   | 0,03             | 0,04   | 0,05   | 0,06   | 0,07   | 0,08   | 0,09   |
|-------------------------------------------|--------|--------|--------|------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0                                         | 0,5000 | 0,5040 | 0,5080 | 0,5120           | 0,5160 | 0,5199 | 0,5239 | 0,5279 | 0,5319 | 0,5359 |
| 0,1                                       | 0,5398 | 0,5438 | 0,5478 | 0,5517           | 0,5557 | 0,5596 | 0,5636 | 0,5675 | 0,5714 | 0,5753 |
| 0,2                                       | 0,5793 | 0,5832 | 0,5871 | 0,5910           | 0,5948 | 0,5987 | 0,6026 | 0,6064 | 0,6103 | 0,6141 |
| 0,3                                       | 0,6179 | 0,6217 | 0,6255 | 0,6293           | 0,6331 | 0,6368 | 0,6406 | 0,6443 | 0,6480 | 0,6517 |
| 0,4                                       | 0,6554 | 0,6591 | 0,6628 | 0,6664           | 0,6700 | 0,6736 | 0,6772 | 0,6808 | 0,6844 | 0,6879 |
| 0,5                                       | 0,6915 | 0,6950 | 0,6985 | 0,7019           | 0,7054 | 0,7088 | 0,7123 | 0,7157 | 0,7190 | 0,7224 |
| 0,6                                       | 0,7257 | 0,7291 | 0,7324 | 0,7357           | 0,7389 | 0,7422 | 0,7454 | 0,7486 | 0,7517 | 0,7549 |
| 0,7                                       | 0,7580 | 0,7611 | 0,7642 | 0,7673           | 0,7704 | 0,7734 | 0,7764 | 0,7794 | 0,7823 | 0,7852 |
| 0,8                                       | 0,7881 | 0,7910 | 0,7939 | 0,7967           | 0,7995 | 0,8023 | 0,8051 | 0,8078 | 0,8106 | 0,8133 |
| 0,9                                       | 0,8159 | 0,8186 | 0,8212 | 0,8238           | 0,8264 | 0,8289 | 0,8315 | 0,8340 | 0,8365 | 0,8389 |
| 1                                         | 0,8413 | 0,8438 | 0,8461 | 0,8485           | 0,8508 | 0,8531 | 0,8554 | 0,8577 | 0,8599 | 0,8621 |
| 1,1                                       | 0,8643 | 0,8665 | 0,8686 | 0,8708           | 0,8729 | 0,8749 | 0,8770 | 0,8790 | 0,8810 | 0,8830 |
| 1,2                                       | 0,8849 | 0,8869 | 0,8888 | 0,8907           | 0,8925 | 0,8944 | 0,8962 | 0,8980 | 0,8997 | 0,9015 |
| 1,3                                       | 0,9032 | 0,9049 | 0,9066 | 0,9082           | 0,9099 | 0,9115 | 0,9131 | 0,9147 | 0,9162 | 0,9177 |
| 1,4                                       | 0,9192 | 0,9207 | 0,9222 | 0,9236           | 0,9251 | 0,9265 | 0,9279 | 0,9292 | 0,9306 | 0,9319 |
| 1,5                                       | 0,9332 | 0,9345 | 0,9357 | 0,9370           | 0,9382 | 0,9394 | 0,9406 | 0,9418 | 0,9429 | 0,9441 |
| 1,6                                       | 0,9452 | 0,9463 | 0,9474 | 0,9484           | 0,9495 | 0,9505 | 0,9515 | 0,9525 | 0,9535 | 0,9545 |
| 1,7                                       | 0,9554 | 0,9564 | 0,9573 | 0,9582           | 0,9591 | 0,9599 | 0,9608 | 0,9616 | 0,9625 | 0,9633 |
| 1,8                                       | 0,9641 | 0,9649 | 0,9656 | 0,9664           | 0,9671 | 0,9678 | 0,9686 | 0,9693 | 0,9699 | 0,9706 |
| 1,9                                       | 0,9713 | 0,9719 | 0,9726 | 0,9732           | 0,9738 | 0,9744 | 0,9750 | 0,9756 | 0,9761 | 0,9767 |
| 2                                         | 0,9772 | 0,9778 | 0,9783 | 0,9788           | 0,9793 | 0,9798 | 0,9803 | 0,9808 | 0,9812 | 0,9817 |
| 2,1                                       | 0,9821 | 0,9826 | 0,9830 | 0,9834           | 0,9838 | 0,9842 | 0,9846 | 0,9850 | 0,9854 | 0,9857 |
| 2,2                                       | 0,9861 | 0,9864 | 0,9868 | 0,9871           | 0,9875 | 0,9878 | 0,9881 | 0,9884 | 0,9887 | 0,9890 |
| 2,3                                       | 0,9893 | 0,9896 | 0,9898 | 0,9901           | 0,9904 | 0,9906 | 0,9909 | 0,9911 | 0,9913 | 0,9916 |
| 2,4                                       | 0,9918 | 0,9920 | 0,9922 | 0,9925           | 0,9927 | 0,9929 | 0,9931 | 0,9932 | 0,9934 | 0,9936 |
| 2,5                                       | 0,9938 | 0,9940 | 0,9941 | 0,9943           | 0,9945 | 0,9946 | 0,9948 | 0,9949 | 0,9951 | 0,9952 |
| 2,6                                       | 0,9953 | 0,9955 | 0,9956 | 0,9957           | 0,9959 | 0,9960 | 0,9961 | 0,9962 | 0,9963 | 0,9964 |
| 2,7                                       | 0,9965 | 0,9966 | 0,9967 | 0,9968           | 0,9969 | 0,9970 | 0,9971 | 0,9972 | 0,9973 | 0,9974 |
| 2,8                                       | 0,9974 | 0,9975 | 0,9976 | 0,9977           | 0,9977 | 0,9978 | 0,9979 | 0,9979 | 0,9980 | 0,9981 |
| 2,9                                       | 0,9981 | 0,9982 | 0,9982 | 0,9983           | 0,9984 | 0,9984 | 0,9985 | 0,9985 | 0,9986 | 0,9986 |
| 3                                         | 0,9987 | 0,9987 | 0,9987 | 0,9988           | 0,9988 | 0,9989 | 0,9989 | 0,9989 | 0,9990 | 0,9990 |
| 3,1                                       | 0,9990 | 0,9991 | 0,9991 | 0,9991           | 0,9992 | 0,9992 | 0,9992 | 0,9992 | 0,9993 | 0,9993 |
| 3,2                                       | 0,9993 | 0,9993 | 0,9994 | 0,9994           | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9995 | 0,9995 | 0,9995 |
| 3,3                                       | 0,9995 | 0,9995 | 0,9995 | 0,9996           | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9997 |
| 3,4                                       | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997           | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9998 |
| 3,5                                       | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998           | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 |
| 3,6                                       | 0,9998 | 0,9998 | 0,9999 | 0,9999           | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 |
| <b>Квантили нормального распределения</b> |        |        |        |                  |        |        |        |        |        |        |
| $(\Phi(u_p) = p)$                         |        |        |        | $u_p = -u_{1-p}$ |        |        |        |        |        |        |
| p                                         | 0,9    | 0,95   | 0,975  | 0,99             | 0,995  | 0,999  | 0,9995 |        |        |        |
| u <sub>p</sub>                            | 1,282  | 1,645  | 1,96   | 2,326            | 2,576  | 3,09   | 3,291  |        |        |        |

## Заключение

Монография «Прогрессивные методологические основы научных исследований и их практическая реализация в современных условиях» разработана на основе результатов научных исследований авторов.

Результаты выполненных исследований показали актуальность и своевременность для общества рассматриваемых вопросов в конкретных сферах науки и образования.

В целом, работа представляет интерес как для специалистов в области проведения научных исследований, так и специалистов-практиков.

## Библиографический список

1. Абрамов В.Ю. Методы анализа аномалий в компьютерных сетях. — М.: РГУ нефти и газа, 2020. — 218 с. — С. 77–79.
2. Акулов Н.А., Анисимов В.О., Анохин Н.А., Борисович А.И. Об анализе некоторых характеристик современных компьютерных сетей // В сборнике: Актуальные проблемы инновационных систем информатизации и безопасности. Материалы международной научно-практической конференции. Воронеж, 2025. С. 16–18.
3. Алешина М. В. Исследовательская деятельность как одна из форм поликультурного образования школьников // Austrian Journal of Humanities and Social Sciences. 2014. № 1. С. 118–124.
4. Анохин Д.Г., Ильинская И.П. Поликультурное образование младших школьников средствами народного искусства // Педагогика. Психология. Социальная работа. Ювенология. Социокинетика. 2015. № 2. С. 149–153.
5. Безрукова В.С. Основы духовной культуры (энциклопедический словарь педагога). Екатеринбург. 2000. 937с.
6. Большой тематический словарь по образованию и педагогике / В. М. Полонский. Москва: Народное образование, 2017. 838 с.
7. Власов Д.А. Введение в математику финансовых инструментов. Москва, 2025
8. Вовк Е.В. Средства поликультурного образования младших школьников // Universum: психология и образование: электрон. научн. журн. 2018. № 4 (46). [Электронный ресурс] - URL: <https://7universum.com/ru/psy/archive/item/5666> (дата обращения: 20.08.2025)
9. Горячева Н.Ю. Информационная безопасность компьютерных систем. — М.: Академия, 2021. — 272 с. — С. 132–148
10. Джуринский А. Н. Педагогика межнационального общения: Поликультурное воспитание в России и за рубежом. М.: Сфера, 2007. С. 88.
11. Джуринский А.Н. Поликультурное образование в многонациональном социуме: учебник и практикум для вузов. Москва: Издательство Юрайт, 2021. 257 с.
12. Длужневская Д. А. Методические рекомендации для педагогов начальной школы по реализации поликультурного пространства в образовательном процессе начальной школы // Молодой ученый. 2015. № 7 (87). С.

748–750. [Электронный ресурс] — URL: <https://moluch.ru/archive/87/16882/> (дата обращения 20.08.2025)

13. Зайцева И.В. Теория вероятностей и математическая статистика для экономистов, Санкт-Петербург, 2022

14. Климов С.Е. Основы противодействия DDoS-атакам. — СПб.: БХВ-Петербург, 2021. — 318 с. — С. 59–61.

15. Коджаспирова Г.М. Педагогика: учебник для среднего профессионального образования. Москва: Издательство Юрайт, 2019. 719с.

16. Коджаспирова Г.М. Педагогический словарь: для студентов высш. и сред. пед. учеб. Заведений. М.: Academia, 2005. С. 91

17. Конституция Российской Федерации (принята всенародным голосованием 12.12.1993) [Электронный ресурс] — URL: [https://www.consultant.ru/document/cons\\_doc\\_LAW\\_28399/](https://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_28399/) (дата обращения 20.08.2025)

18. Новгородцева И. В. Педагогика с методикой преподавания специальных дисциплин: учеб. пособие модульного типа. Москва: ФЛИНТА, 2011. 378 с. [Электронный ресурс] - URL: <https://znanium.com/catalog/product/454525> (дата обращения 20.08.2025)

19. Панфилова А.П. Инновационные педагогические технологии: активное обучение / А.П. Панфилова. – Москва: Издательский центр «Академия», 2009. 192 с.

20. Педагогический энциклопедический словарь / Гл. ред. Б. М. Бим-Бад. М.: Большая рос. энцикл., 2002. 527 с.

21. Плотников А.А., Жилейко А.А., Любавская П.А., Амирасланов А.А. О Проблемах анализа характеристик беспроводных сетей // В сборнике: Актуальные проблемы инновационных систем информатизации и безопасности. Материалы международной научно-практической конференции. Воронеж, 2025. С. 179-181.

22. Социальная педагогика: краткий словарь понятий и терминов / Министерство образования и науки РФ, Российский гос. социальный ун-т; авт.-сост. Л. В. Мардахаев. - Москва: Изд-во Российского социального у-та, 2016. 362 с.

23. Сухорукова И. В., Савина О. И., Лавриненко Т. А. Высшая математика (для гуманитарных специальностей). – М., 2020

24. Сухорукова И. В., Чистякова Н. А. Содержательно-методическая концепция формирования спецкурса по приложениям марковских процессов. 2021 – Т. 6 – № 1 – С. 31–41.

25. Сухорукова И.В., Чистякова Н.А. Оптимизация исследования оценок параметров специального семейства вероятностных распределений. Экономика и управление: проблемы, решения. 2024 Т. 5 № 3 (144). С. 6-12
26. Сухорукова И.В., Чистякова Н.А. Разработка универсальных алгоритмов построения статистических оценок для специальных классов распределений. В сборнике: ПРИОРИТЕТЫ И МЕХАНИЗМЫ СТРАТЕГИЧЕСКОГО ПЛАНИРОВАНИЯ В РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ. сборник статей XII Международной научной конференции. Москва, 2023 С. 216-224
27. Сухорукова И.В., Чистякова Н.А. Универсальный статистический анализ распределений, зависящих от параметра. Экономика и управление: проблемы, решения. 2023 Т. 2 № 4 (136). С. 10-16
28. Хасанов А. С. Практические задания по теории вероятностей и математической статистике. – М., 2023
29. Хухлаева О.В. Поликультурное образование: учебник для вузов. Москва: Издательство Юрайт, 2021. 283с.
30. Швецова И.В. Интерактивные педагогические технологии в системе дополнительного образования // Труды СПбГИК. 2013. С. 324–331. [Электронный ресурс] - URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/interaktivnye-pedagogicheskie-tehnologii-v-sisteme-dopolnitelnogo-obrazovaniya> (дата обращения: 20.08.2025)
31. Шевченко А.Н. Анализ ключевых понятий поликультурной компетентности в современном образовательном пространстве // Формирование профессиональной компетентности филолога в поликультурной образовательной среде : сб. материалов науч.-практ. конф., 24–25 ноября 2017 г., г. Евпатория / ред. кол. И. Б. Каменская, А. И. Каменский, Ю. К. Картавая, М. А. Шалина; под общ. ред. И. Б. Каменской. Симферополь: ИТ «Ариал», 2017. С. 16–22.
32. Шевченко А.Н. Средства поликультурного образования младших школьников // Вестник Омского государственного университета. Гуманитарные исследования. 2019. с. 145 -147.
33. Шевченко Н.Н., Шевченко В.И. Организация интерактивной среды вуза как императив современного профессионального образования // КПЖ. 2018. №2 (127). С. 64-69. [Электронный ресурс] - URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/organizatsiya-interaktivnoy-sredy-vuza-kak-imperativ-sovremennogo-professionalnogo-obrazovaniya> (дата обращения: 20.08.2025)
34. Behal S., Kumar K., Sachdeva M. DDoS Attack Detection and Mitigation Using Machine Learning Techniques: A Review // Computer Networks. — 2021. — Vol. 187. — P. 71–72.

35. He, Z., Chan, K.C.C. Machine Learning for DDoS Detection: Survey and Challenges // Journal of Network and Computer Applications, 2022. — Т. 200. — С. 12–20.
36. Kwon, D., Kim, D.H. Deep Anomaly Detection in Network Traffic // Sensors, 2023. — Т. 23(1). — С. 80–87.
37. Sharma, R., Sood, S.K. A Survey on DDoS Detection Using Machine Learning Algorithms // Journal of Network and Computer Applications, 2022. — Т. 198. — С. 61–72.
38. Sukhorukova I. V., Chistyakova N. A. Mathematical Model for Assessing Environmental Risk // IOP Conference Series : Materials Science and Engineering. II International Scientific Practical Conference «Breakthrough Technologies and Communications in Industry and City» BTCl 2019 – 2020
39. Sukhorukova I.V., Chistyakova N.A. METHODOICAL ASPECTS OF ACTUARIAL MATHEMATICS TEACHING. Astra Salvensis. 2018 Т. 6 С.847-857.
40. Ullah, F., et al. Deep and Hybrid Learning Approaches for DDoS Detection // Future Generation Computer Systems, 2022. — Т. 130. — С. 18–30.

## Сведения об авторах

|                            |                                                                                                                                                                         |
|----------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <i>Аветисян Т.В.</i>       | Воронежский институт высоких технологий                                                                                                                                 |
| <i>Авдеева Т.И.</i>        | доцент кафедры педагогики начального и дошкольного образования,<br>кандидат педагогических наук.<br>ГОУ ВО МО "Государственный гуманитарно-технологический университет" |
| <i>Львович И.Я.</i>        | Воронежский институт высоких технологий                                                                                                                                 |
| <i>Львович Я.Е.</i>        | Воронежский институт высоких технологий                                                                                                                                 |
| <i>Преображенский А.П.</i> | Воронежский институт высоких технологий                                                                                                                                 |
| <i>Преображенский Ю.П.</i> | Воронежский институт высоких технологий                                                                                                                                 |
| <i>Сухорукова И.В.</i>     | д.э.н., профессор кафедры высшей математики,<br>РЭУ им. Г. В. Плеханова                                                                                                 |
| <i>Чистякова Н.А.</i>      | к. ф.-м. н., доцент кафедры высшей математики,<br>РЭУ им. Г. В. Плеханова                                                                                               |

Электронное научное издание  
сетевого распространения

**ПРОГРЕССИВНЫЕ МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ  
ОСНОВЫ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ И ИХ  
ПРАКТИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ В  
СОВРЕМЕННЫХ УСЛОВИЯХ**

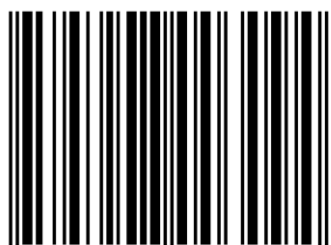
КОЛЛЕКТИВНАЯ МОНОГРАФИЯ

По вопросам и замечаниям к изданию, а также предложениям к  
сотрудничеству обращаться по электронной почте [mail@scipro.ru](mailto:mail@scipro.ru)

Подготовлено с авторских оригиналов



ISBN 978-5-908003-09-4



9 785908 003094 >

Усл. печ. л. 3,3

Объем издания 9,1 МВ

Оформление электронного издания: НОО

Профессиональная наука, mail@scipro.ru

Дата размещения: 30.08.2025 г.

URL: [http://scipro.ru/conf/monograph\\_250825.pdf](http://scipro.ru/conf/monograph_250825.pdf).