



НОО "Профессиональная наука"

www.scipro.ru

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ И ПРИКЛАДНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ В ОБЛАСТИ ТЕХНИЧЕСКИХ И ФИЗИКО- МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

**БОБИН К.Н., ГОРЕПЕКИНА А.А.,
КУРЛАЕВ Н.В., НИКОЛАЕВА Е.А.,
РЫНГАЧ Н.А., СОРОКИНА М.М.**

КОЛЛЕКТИВНАЯ МОНОГРАФИЯ

**НАУЧНАЯ ОБЩЕСТВЕННАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ
ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ НАУКА**

**Фундаментальные и прикладные
исследования в области технических и
физико-математических наук**

Монография

УДК 693.547: 624.131

ББК 31.19

Ф94

Рецензенты:

Сагитов Рамиль Фаргатович, кандидат технических наук, доцент, заместитель директора по научной работе в ООО «Научно-исследовательский и проектный институт экологических проблем», г. Оренбург

Авторы:

Бобин К.Н., Горепекина А.А., Курлаев Н.В., Николаева Е.А., Рынгач Н.А., Сорокина М.М.

Фундаментальные и прикладные исследования в области технических и физико-математических наук [Электронный ресурс]: монография. – Эл. изд. - Электрон. текстовые дан. (1 файл pdf: 62 с.). - Нижний Новгород: НОО "Профессиональная наука", 2020. – Режим доступа: <http://scipro.ru/conf/monographengineering050920.pdf>. Сист. требования: Adobe Reader; экран 10".

ISBN 978-5-6045106-4-3

Монография посвящена проблемам современного технического и технологического развития. В современных исследованиях, проводимых во всем мире, эксперты выделяют основные тенденции научно-технологического развития: усиление конвергенции технологий; усиление диффузии современных высоких технологий в среднетехнологические сектора производственной сферы; растущее значение мультидисциплинарности научных исследований; усиление воздействия новых технологий на управление и организационные формы бизнеса, стимулирующее развитие гибких сетевых структур. В рамках каждой из этих тенденций формируются многообещающие новые технологии и области науки с точки зрения их потенциального применения в различных сферах человеческой деятельности. Эти технологии потенциально являются ответами на глобальные вызовы и формируют новый технологический образ мира.

Материалы монографии будут полезны преподавателям, научным работникам, специалистам промышленных предприятий, организаций и учреждений, а также студентам, магистрантам и аспирантам.

При верстке электронной книги использованы материалы с ресурсов: Designed by Freepik, Canva.

ISBN 978-5-6045106-4-3



9 785604 510643

© Авторский коллектив, 2020 г.

© Издательство НОО Профессиональная наука, 2020 г.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
Глава 1. Подход к созданию комплекса технических средств.....	7
Глава 2. О некоторых подгруппах конечных групп.....	10
Глава 3. Моделирование формообразования деталей импульсным магнитным полем.....	38
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	57
СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ.....	60

Введение

Переход экономики России на инновационный путь развития в условиях глобализации и все более глубокой интеграции страны в мирохозяйственные связи, рост открытости экономики, является императивом для сохранения устойчивых темпов экономического роста в среднесрочной и долгосрочной перспективах. В эпоху глобализации мировой экономики основа успешного позиционирования страны, региона, отрасли лежит в постоянном инновационном обновлении, направленном на достижение максимальной производительности, конкурентоспособности, развитии человеческого капитала.

В современных исследованиях, проводимых во всем мире, эксперты выделяют основные тенденции научно-технологического развития: усиление конвергенции технологий; усиление диффузии современных высоких технологий в среднетехнологические сектора производственной сферы; растущее значение мультидисциплинарности научных исследований; усиление воздействия новых технологий на управление и организационные формы бизнеса, стимулирующее развитие гибких сетевых структур. В рамках каждой из этих тенденций формируются многообещающие новые технологии и области науки с точки зрения их потенциального применения в различных сферах человеческой деятельности. Эти технологии потенциально являются ответами на глобальные вызовы и формируют новый технологический образ мира.

Монография состоит из 3-х глав.

В первой главе предложен подход к созданию комплекса технических средств с уникальными характеристиками. Для реализации предельно достижимых значений параметров устройств, входящих в состав комплекса, необходимо привлечение соисполнителей и согласование их планов проектных работ. Поэтапное решение задачи включает моделирование процесса проектирования с декомпозицией процедур и достижением полноты и непротиворечивости. Непосредственное планирование проектных работ осуществляется на основе метода недоопределенных вычислений.

Во второй главе рассматриваются подгруппы конечных групп. В рамках теории групп в тридцатые годы двадцатого столетия сформировалось новое научное направление – теория классов групп. Классом называют всякое множество групп, содержащее с каждой своей группой и все группы ей изоморфные. Одним из основных видов классов конечных групп являются формации, введенные в рассмотрение В. Гашюцем в 1963 году. Формации нашли широкое применение при изучении подгруппового строения конечных групп. Так, для локальной формации F в настоящее время детально изучены в конечных группах многие виды подгрупп, в частности, F

-проекторы и F -покрывающие подгруппы, естественным образом обобщающие такие классические подгруппы в группах, как холловы, картеровы, гашюцевы подгруппы. Понятия F_Ω -проектора и F_Ω -покрывающей подгруппы группы, которые вводятся в рассмотрение в данной главе для непустого класса F произвольных групп и непустого класса Ω простых групп, естественным образом обобщают понятия F -проектора и F -покрывающей подгруппы соответственно. В главе изучаются такие свойства этих подгрупп, как существование, сопряженность, вложение и др., тем самым получено обобщение известных результатов В. Гашюца, Х. Шунка, Р. Эриксона. Глава состоит из шести разделов. Раздел 1 содержит небольшую историческую справку изучаемой темы. В разделе 2 приведены некоторые определения и обозначения, а также формулировки известных лемм и теорем, которые используются в исследованиях. В разделах 3 и 4 вводятся в рассмотрение Ω -примитивные группы, Ω -насыщенные и Ω -примитивно замкнутые классы групп, играющие важную роль в исследуемом направлении. Разделы 5 и 6 являются центральными, в них представлены ключевые результаты об F_Ω -проекторах и F_Ω -покрывающих подгруппах конечных групп.

В третьей главе рассматривается вопрос «Моделирование формообразования деталей импульсным магнитным полем». В настоящее время производство тонкостенных листовых деталей летательных аппаратов идет по пути усложнения форм деталей и узлов, которое вызвано как конструктивными, так и технологическими требованиями. В данной работе описываются существующие методы расчета технологических параметров процесса обработки импульсным магнитным полем тонкостенных листовых деталей.

Данные методы расчета достаточно разнообразны – от достаточно грубых аналитических методик до физически корректного конечно-элементного междисциплинарного моделирования, которое позволяет выявить возможные дефекты в виде локальных разрушений и гофров еще на этапе проектирования конструкции деталей.

Авторский коллектив:

Николаева Е.А. (Глава 1. Подход к созданию комплекса технических средств)

Сорокина М.М., Горепекина А.А. (Глава 2. О некоторых подгруппах конечных групп)

Рынгач Н.А., Бобин К.Н., Курлаев Н.В. (Глава 3. Моделирование формообразования деталей импульсным магнитным полем)

Глава 1. Подход к созданию комплекса технических средств

Известные подходы к проектированию м ориентированы, в основном, на создание технических средств (ТС), имеющих прототипы. Так, некоторые подходы к проектированию носят названия «прототипирование», «композиционное проектирование» и т.п. Вместе с тем создание (проектирование и производство) уникальных ТС требует поиска новых подходов.^{1,2}

Руководитель проекта по созданию «топовых» ТС стремится решить сложнейшую задачу синтеза, уложившись в жесткие рамки проектного треугольника:

- 1) заданные сроки (директивно, опосредованно или в качестве решения оптимизационной задачи);
- 2) ограниченная (минимизируемая) стоимость;
- 3) множество характеристик ТС, заданных в ограничениях.

Основными факторами, препятствующими достижению цели проекта являются:

итерационный характер проектных процедур, и, как следствие, вероятностный характер достижения требуемых характеристик узлов, блоков, подсистем и т.д. с первой попытки;

наличие отношения рефлексивности (временной и функциональной связи) между проектными процедурами, как всего ТС, так и входящих в его состав компонент;

неопределенность продолжительности, затрат и результативности проектных процедур.

По мере совершенствования ТС возрастает сложность их проектирования, повышаются требования к качеству получаемых результатов и эффективности реализуемых процессов на каждом из этапов создания. Опережающими темпами растет объем информации, подлежащей анализу, сокращается время, отводимое на принятие проектных и управленческих решений.^{3,4} Приведенные факторы требуют регулярного согласования технических характеристик систем (подсистем, блоков,

¹ И.В. Гречин, П.В. Сороколетов Проектирование вычислительного комплекса для принятия решений, Известия ЮФУ. Технические науки, вып.2, 2008.

² Каляев И.А. и др. Создание и внедрение отечественных высокопроизводительных вычислительных систем с реконфигурируемой архитектурой. Южный научный центр РАН, г. Ростов-на-Дону, 2018.

³ И.В. Гречин, П.В. Сороколетов Проектирование вычислительного комплекса для принятия решений, Известия ЮФУ. Технические науки, вып.2, 2008.

⁴ Каляев И.А. и др. Создание и внедрение отечественных высокопроизводительных вычислительных систем с реконфигурируемой архитектурой. Южный научный центр РАН, г. Ростов-на-Дону, 2018

узлов), а также сроков и стоимости выполнения проектных, производственных, технологических и вспомогательных работ.

Анализ процесса создания ТС позволяет сделать вывод о необходимости функционального моделирования, позволяющего накапливать опыт и понимание созданных моделей сотрудниками и соисполнителями, а также создающего предпосылки полного выполнения требований технического задания.

В качестве средств структурного анализа целесообразно использовать модель в описании SADT (IDEF0)⁵, как совокупность иерархически упорядоченных и взаимосвязанных диаграмм, обеспечивающих полноту и непротиворечивость описания, необходимые для достижения результатов анализа.

Необходимо отметить, что важнейшим фактором, определяющим этапы «формирование облика», «проектирование» и «внедрение-эксплуатация» ТС является наличие неопределенности применительно к данным, алгоритмам обработки, техническим требованиям. В условиях реализации прогрессивной параллельной разработки компонент ТС это создает острую необходимость применения (разработки) методического аппарата, обеспечивающего вычисление значений характеристик ТС с учетом указанных особенностей. При этом данные о ТС могут иметь значительные погрешности в определении значений измеряемых параметров технического состояния на различных этапах. Вместе с тем, появляется возможность оперативного их уточнения на основе поступающей разнородной информации мониторинга.

При решении задачи создания комплексов ТС с уникальными характеристиками наиболее конструктивным из подходов представляются недоопределенные модели (Н-модели)⁶. Н-модели выделяются среди других подходов вычислительной мощностью, универсальностью и эффективностью. Недоопределенные модели, применительно к созданию ТС, создают предпосылки существенного повышения достоверности формирования требований к комплексу и системам, что в свою очередь повышает уровень результативности решаемых в рамках проведения НИОКР задач. Графическое представление процедур подхода и эффекта от их использования приведено на рисунке.

ВЫВОД: Изложенные результаты позволяют утверждать, что предложенный подход на основе обоснованной совокупности методических средств, создает предпосылки своевременного создания уникального ТС в рамках выделенного бюджета с заданными техническими характеристиками.

⁵ Марка Д.А., МакГоуэн К.Л. Методология структурного анализа и проектирования: Пер. с англ. — М., «Метотехнология», 1993.

⁶ Нариньяни А.С. Недоопределенность в системах представления и обработки знаний // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1986. № 5. — С. 3 – 28.

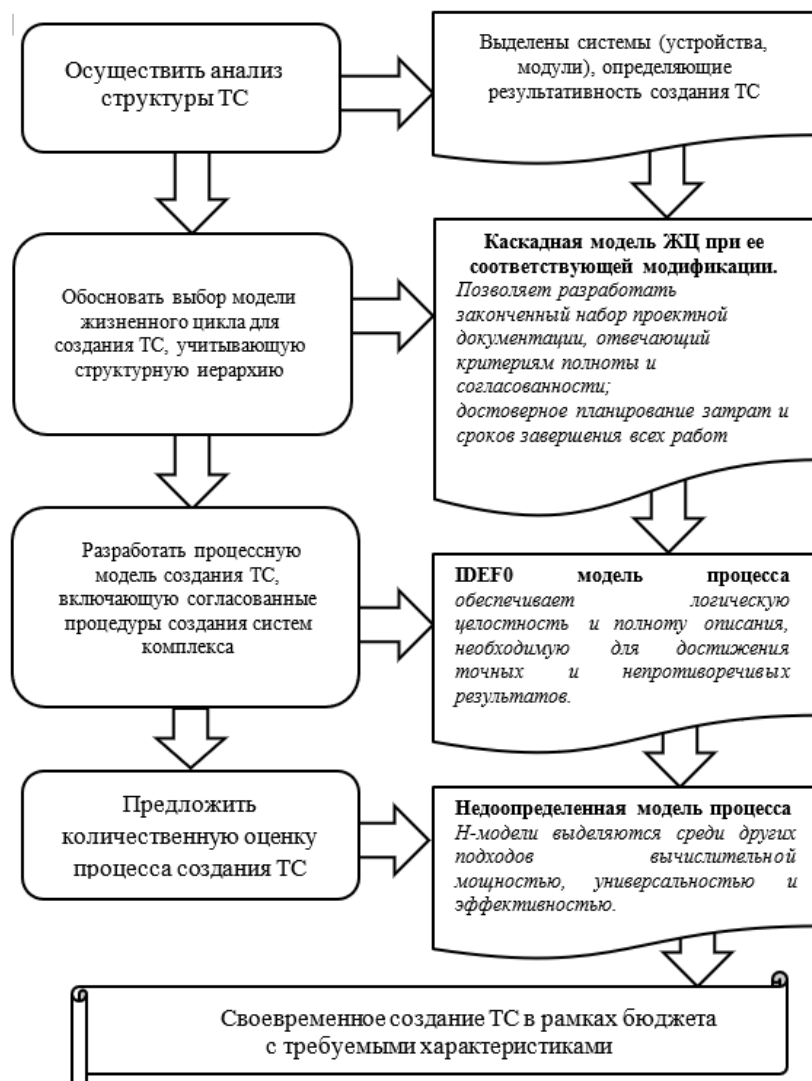


Рисунок 1.1. Процедуры и эффект предложенного подхода

Глава 2. О некоторых подгруппах конечных групп

Рассматриваются только конечные группы и классы конечных групп. Среди классов конечных групп центральное место занимают формации – классы групп, замкнутые относительно гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. Формациями являются такие важные классы групп, как S , U , N , A – классы всех конечных разрешимых, сверхразрешимых, нильпотентных, абелевых групп соответственно, и многие другие, причем S , U , N являются насыщенными формациями.

Формации явились эффективным средством для изучения подгруппового строения конечных групп, что обусловило интенсивное развитие теории формаций в последние десятилетия. С помощью насыщенных формаций были решены многие важные вопросы в теории конечных групп, в частности, с единых позиций изложены результаты о силовских, холловых, картеровых, гашюцевых подгруппах, о системных нормализаторах конечных разрешимых групп, о группах Миллера-Морено, группах Шмидта и многие другие⁷.

В теории классов конечных групп важную роль играют функциональные методы. Удобным инструментом для изучения формаций явились функции, в качестве области определения которых выступает множество $\mathbb{P}$ всех простых чисел (или, что равносильно, класс всех конечных простых абелевых групп). Так, понятие формации было введено В. Гашюцем в 1963 году в работе⁸, и уже в этой работе с помощью функциональных методов В. Гашюцем были построены локальные формации, занимающие центральное место в теории формаций конечных групп, а также установлено, что в универсуме всех конечных разрешимых групп всякая локальная формация является насыщенной. Теорема о том, что всякая формация конечных групп насыщена тогда и только тогда, когда она локальна, известна в настоящее время как теорема Гашюца-Любезедер-Шмида⁹. Следуя В. Гашюцу, Б. Хартли ввел понятие локального класса Фиттинга¹⁰.

Понятие F -покрывающей подгруппы, введенное в рассмотрение В.

⁷ Шеметков Л.А. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.

⁸ Gaschutz W. Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen // Jour. Math. Z., V. 80, Issue 4, 1963. P. 300–305.

⁹ Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. – Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992, теорема IV.4.6.

¹⁰ Hartley B. On Fischer's analization of formation theory // Proc. London Math. Soc., 1969. V. 3. N 9. P. 193–207.

Гашюцем¹¹, явилось естественным обобщением понятий холловой и картеровой подгрупп. В. Гашюц объединил и расширил известные результаты Ф. Холла¹² и Р. Картера¹³, а именно, им были установлены существование и сопряженность F -покрывающих подгрупп (F -проекторов). Понятие F -проектора группы было введено В. Гашюцем в 1969 году в разрешимой группе для насыщенной (локальной) формации F ¹⁴. Отметим, что в универсуме всех конечных разрешимых групп понятия F -покрывающей подгруппы и F -проектора совпадают. В работе¹⁵ Х. Шунка теорема Гашюца была распространена для класса F , являющегося примитивно замкнутым гомоморфом. П. Шмид¹⁶ и Э.Ф. Шмигирев¹⁷ распространили результаты работы В. Гашюца на произвольные группы с разрешимым F -корадикалом, а Л.А. Шеметковым условие разрешимости F -корадикала было ослаблено до $\pi(F)$ -разрешимости¹⁸.

Дальнейшее обобщение отмеченные результаты получили в работе¹⁹ Р. Эриксона для примитивно замкнутого гомоморфа (класса Шунка), содержащегося в SQ -замкнутом универсуме. В работе²⁰ П. Фёрстера к исследованию вопросов существования и сопряженности F -проекторов в группах для класса Шунка F , содержащегося в SQE_F -замкнутом универсуме, был применен подход, основанный на использовании Q -границы класса Шунка²¹. В ряде работ²² были установлены

¹¹ Gaschutz W. Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen // Jour. Math. Z., V. 80, Issue 4, 1963. P. 300–305.

¹² Hall P. A note on soluble groups // J. London Math. Soc. 1928. V. 3. P. 98–105.

¹³ Carter R. Nilpotent self-normalizing subgroups of soluble groups // Math. Z., 1961. V. 75. P. 136–139.

¹⁴ Gaschutz W. Lectures on subgroups of Sylow type in finite soluble groups – Canberra: Notes on Pure Mathematics 11, Australian Nat. Univ., 1979. 98 p.

¹⁵ Schunck H. H -Untergruppen in endlichen auflösbaren Gruppen // Math. Z., 1967. V. 97, Issue 4. P. 326–330.

¹⁶ Schmid P. Lokale Formationen endlicher Gruppen // Math. Z., 1974. V. 137, Issue 1. P. 31–48.

¹⁷ Шмигирев Э.Ф. О некоторых вопросах теории формаций // в кн. «Конечные группы». Минск: Наука и техника, 1975.

¹⁸ Шеметков Л.А. Факторизации непростых конечных групп // Алгебра и логика, 1976. Т. 15, № 6. С. 684–715.

¹⁹ Erickson R. Projectors of finite groups // Comm. Algebra, 1982. V. 10. P. 1919–1938.

²⁰ Forster P. Projektive Klassen endlicher Gruppen I. Schunck- und Gaschutzklassen // Math. Z., 1984. V. 186. P. 249–278.

²¹ Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992, главы III и VI.

²² Ведерников В.А. О F -проекторах групп // Вопросы алгебры, 1985. Т. 1. С. 9–22.

Bauman S. A note on covering and avoidance properties in solvable groups // Proc. Amtr. Math. Soc., 1969. V. 21. P. 173–174.

Beidleman S., Brewster B. F -Covering subgroups of finite groups // Boll. Unione mat. ital., 1969. V. 3, Issue 6. P. 987–992.

Carter R., Hawkes T. The F -normalizers of a finite soluble group // J. Algebra, 1967. V. 5, Issue 2. P. 175–201.

необходимые и достаточные условия, при которых F -подгруппа является F -покрывающей подгруппой (F -проектором) группы или содержится в её F -покрывающей подгруппе (F -проекторе), в частности, выявлены условия при которых F -проектор группы является её F -покрывающей подгруппой. К. Дерком и Т. Хоуксом была поставлена следующая общая проблема²³: «Может ли универсум, для которого работает теория проекторов, расширен за пределы класса S всех конечных разрешимых групп?». К этому направлению относятся упомянутые выше результаты П. Шмида, Э.Ф. Шмигирева, Л.А. Шеметкова, Р. Эриксона, П. Фёрстера.

В связи с классификацией конечных простых групп актуальной в теории конечных групп стала задача исследования непростых конечных групп с произвольными, необязательно абелевыми, композиционными факторами. Наиболее удобными для решения этой задачи явились композиционные формации, введенные в рассмотрение Л.А. Шеметковым в 1974 году с помощью функций вида $f: I \rightarrow \{\text{формации конечных групп}\}$, где I – класс всех конечных простых групп²⁴. Независимо от Л.А. Шеметкова композиционные формации были построены Р. Бэром в терминах разрешимо насыщенных формаций²⁵. Композиционные формации также нашли широкое применение в теории конечных групп, в частности, при изучении субнормальных подгрупп и их обобщений²⁶.

Тот факт, что теория формаций оказалась достаточно удобным средством для решения многих вопросов теории конечных групп, привел к необходимости более тщательного изучения самих формаций. В 1984 году Л.А. Шеметков для непустого подмножества ω множества $\mathbb{P}$ построил ω -локальные формации²⁷, раскрыв новые возможности использования функций при изучении классов конечных групп. Примером этому служат работы²⁸. В работе²⁹ А.Н. Скибой и Л.А. Шеметковым доказана равносильность понятий ω -локальной и ω -насыщенной формаций. В работе³⁰

Hawkes T. On formation subgroups of finite soluble group // J. London Math. Soc., 1968. V. 44, Issue 2. P. 243–250.

²³ Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. – Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992, глава III, § 3, проблема В.

²⁴ Шеметков Л.А. Ступенчатые формации групп // Математический сборник, 1974. Т. 94. № 4. С. 628–648.

²⁵ Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992.

²⁶ Каморников С.Ф., Селькин М.В. Подгрупповые функторы и классы конечных групп. Минск: Беларуская навука, 2003.

²⁷ Шеметков Л.А. О произведении формаций // Доклады АН БССР, 1984. Т. 28, № 2. С. 101–103.

²⁸ Скиба А.Н., Шеметков Л.А. О частично локальных формациях // ДАН Беларуси, 1995. Т. 39. № 3. С. 123–143.

Шеметков Л.А. Локальные задания формаций конечных групп // Фундаментальная и прикладная математика, 2010. Т. 16, № 8. С. 229–244.

²⁹ Скиба А.Н., Шеметков Л.А. Кратно ω -локальные формации и классы Фиттинга конечных групп // Матем. труды, 1999. Том 2, № 2. С. 114–147.

³⁰ Ведерников В.А., Сорокина М.М. F -проекторы и F -покрывающие подгруппы конечных групп // Сибирский математический журнал, 2016. Т. 57, № 6. С. 1224–1239.

получено дальнейшее продвижение в решении вышеуказанной проблемы К. Дерка и Т. Хоукса, а именно, введено в рассмотрение понятие F^ω -проектора конечной группы и получено расширение основных результатов упомянутых выше работ Л.А. Шеметкова, Э.Ф. Шмигирева, Р. Эриксона, В. Гашюца, П. Шмида для класса F , являющегося ω -локальной (ω -насыщенной) формацией или ω -примитивно замкнутым гомоморфом. В 1999 году А.Н. Скиба и Л.А. Шеметков ввели в рассмотрение Ω -композиционные формации, где Ω – непустой класс простых групп³¹. Наша цель – распространить результаты статьи³² для класса F , являющегося Ω -композиционной формацией или Ω -примитивно замкнутым гомоморфом, тем самым получить дальнейшее продвижение в решении вышеотмеченной проблемы К. Дерка и Т. Хоукса.

Предварительные сведения

Используемые определения и обозначения для групп и классов групп стандартны, их можно найти в книгах³³. Приведем лишь некоторые из них.

$H \leq G$ – H является подгруппой группы G ;

$H < G$ – H является собственной подгруппой группы G ;

$H < \cdot G$ – H является максимальной подгруппой группы G ;

$H \triangleleft G$ – H является нормальной подгруппой группы G ;

$H \cdot \triangleleft G$ – H является минимальной нормальной подгруппой группы G ;

$|G|$ – порядок группы G ;

$H := K$ – равенство $H = K$ верно по определению;

$G = H \times K$ – группа G есть прямое произведение подгрупп H и K ;

$G = [H]K$ – группа G есть полупрямое произведение подгрупп H и K , где $H \triangleleft G$;

$\text{Core}_G(H)$ – ядро подгруппы H в группе G ;

1 – единичная группа;

$\Phi(G)$ – подгруппа Фраттини группы G ;

$F(G)$ – подгруппа Фиттинга группы G ;

³¹ Скиба А.Н., Шеметков Л.А. Частично композиционные формации конечных групп // Доклады НАН Беларуси, 1999. Т. 43, № 4. С. 5–8.

³² Ведерников В.А., Сорокина М.М. F -проекторы и F -покрывающие подгруппы конечных групп // Сибирский математический журнал, 2016. Т. 57, № 6. С. 1224–1239.

³³ Монахов В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов. Минск: Выш. шк., 2006;
Шеметков Л.А. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978;
Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992.

$C_G(H)$ – централизатор подмножества H в группе G ;

$N_G(H)$ – нормализатор подмножества H в группе G ;

$\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел;

$\pi(G)$ – множество всех простых делителей порядка группы G ;

$\pi(X) = \bigcup_{G \in X} \pi(G)$;

Z_p – группа простого порядка p ;

π -группа (πd -группа, π' -группа) – группа G такая, что $\pi(G) \subseteq \pi$ (соответственно $\pi(G) \cap \pi \neq \emptyset$, $\pi(G) \cap \pi = \emptyset$), где π – непустое подмножество множества $\mathbb{P}$;

π -разрешимая группа – группа G такая, что каждый ее главный фактор является либо π' -группой, либо абелевой p -группой для некоторого $p \in \pi$, где π – непустое подмножество множества $\mathbb{P}$;

примитивная группа – группа G , в которой существует максимальная подгруппа M (примитиватор) такая, что $\text{Core}_G(M) = 1$.

Классом групп называется всякое множество групп F , содержащее с каждой своей группой G и все группы изоморфные G . Через $E(S, N, A)$ обозначается класс всех конечных (соответственно разрешимых, нильпотентных, абелевых) групп³⁴. Класс F называется гомоморфом или Q -замкнутым классом, если из $G \in F$ и $N \triangleleft G$ следует, что $G/N \in F$. Гомоморф F называется формацией, если из $G/A \in F$ и $G/B \in F$ следует, что $G/A \cap B \in F$. Класс F называется наследственным или S -замкнутым классом (нормально наследственным или S_n -замкнутым классом), если из $G \in F$ и $H \leq G$ (соответственно $H \triangleleft G$) следует, что $H \in F$. Нормально наследственный класс F называется классом Фиттинга, если из $G = AB$, $A \triangleleft G$, $B \triangleleft G$, $A, B \in F$ следует, что $G \in F$ ³⁵.

Пусть F и X – классы групп, $F \subseteq X$. Класс F называется насыщенным в X , если для любой группы $G \in X$ и любой $N \triangleleft G$ такой, что $N \leq \Phi(G)$, из $G/N \in F$ следует, что $G \in F$; класс F называется примитивно замкнутым в X или, коротко, P -замкнутым в X , если из $G/\text{Core}_G(M) \in F$ для любой максимальной подгруппы M группы $G \in X$ следует, что $G \in F$. При $X = E$ получаем соответственно определения насыщенного класса и примитивно замкнутого (коротко, P -замкнутого) класса. P -замкнутый гомоморф называется классом Шунка³⁶ или P -

³⁴ Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992.

³⁵ Шеметков Л.А. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.

³⁶ Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992, определение II.2.1.

гомоморфом³⁷.

В дальнейшем Ω обозначает некоторый непустой подкласс класса I всех простых групп; ω – непустое подмножество множества $\mathbb{P}$; $K(G)$ – класс всех групп, изоморфных композиционным факторам группы G ; $K(X) = \bigcup_{G \in X} K(G)$; G – Ω -группа, если $K(G) \subseteq \Omega$; F_Ω – класс всех Ω -групп, принадлежащих F ; $O_\Omega(G)$ – E_Ω -радикал группы G , т.е. наибольшая нормальная Ω -подгруппа группы G . Следуя работе³⁸, введем обозначения: $\Omega^+ := \Omega \cap A$, $\Omega^- := \Omega \setminus A$; $G_{\omega S}$ – ω -разрешимый радикал группы G , т.е. наибольшая нормальная ω -разрешимая подгруппа группы G .

Пусть F и X – непустые классы групп, $F \subseteq X$. Класс групп F называется ω -насыщенным в X , если для любой группы $G \in X$ и любой $N \triangleleft G$ такой, что $N \leq \Phi(G) \cap O_\omega(G)$, из $G/N \in F$ следует, что $G \in F$ (при $X = E$ получаем определение ω -насыщенного класса групп³⁹); класс F называется ω -примитивно замкнутым в X или, коротко, ωP -замкнутым в X , если для любой группы $G \in X$ из $G/(Core_G(M) \cap O_\omega(G)) \in F$ для любой $M < G$ следует, что $G \in F$ ⁴⁰.

Формация F называется ω -разрешимо насыщенной, если из условия $G/N \in F$ для G -инвариантной ω -подгруппы N из $\Phi(G_{\omega S})$ всегда следует, что $G \in F$; формация F называется N_ω -насыщенной, если для любого $p \in \omega$ из того, что $G/\Phi(O_p(G)) \in F$, всегда следует, что $G \in F$ ⁴¹.

Пусть $f: \Omega \cup \{\Omega'\} \rightarrow \{\text{формации}\}$, где $f(\Omega') \neq \emptyset$, $g: I \rightarrow \{\text{формации}\}$, $\varphi: I \rightarrow \{\text{непустые формации Фиттинга}\}$ – функции, принимающие одинаковые значения на изоморфных группах из области определения. Формация

$\Omega F(f, \varphi) = (G \in E \mid G/O_\Omega(G) \in f(\Omega') \text{ и } G/G_{\varphi(A)} \in f(A) \text{ для всех } A \in \Omega \cap K(G))$ называется Ω -расслоенной формацией с Ω -спутником f и направлением φ ; формация

$$F(f, \varphi) = (G \in E \mid G/G_{\varphi(A)} \in g(A) \text{ для всех } A \in K(G))$$

называется $\text{расслоенной формацией со спутником } g \text{ и направлением } \varphi$ ⁴². Формация $\Omega F(f, \varphi)$ (формация $F(g, \varphi)$) называется Ω -композиционной (композиционной), если

³⁷ Ведерников В.А., Сорокина М.М. F -проекторы и F -покрывающие подгруппы конечных групп // Сибирский математический журнал, 2016. Т. 57, № 6. С. 1224–1239.

³⁸ Шеметков Л.А. Локальные задания формаций конечных групп // Фундаментальная и прикладная математика, 2010. Т. 16, № 8. С. 229–244.

³⁹ Скиба А.Н., Шеметков Л.А. Кратно ω -локальные формации и классы Фиттинга конечных групп // Матем. труды, 1999. Том 2, № 2. С. 114–147.

⁴⁰ Ведерников В.А., Сорокина М.М. F -проекторы и F -покрывающие подгруппы конечных групп // Сибирский математический журнал, 2016. Т. 57, № 6. С. 1224–1239.

⁴¹ Шеметков Л.А. Локальные задания формаций конечных групп // Фундаментальная и прикладная математика, 2010. Т. 16, № 8. С. 229–244.

⁴² Ведерников В.А., Сорокина М.М. Ω -расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп // Дискретная математика, 2001. Т. 13, № 3. С. 125–144.

$\varphi(A) = S_{cA}$ для любого $A \in I$, где S_{cA} – класс всех групп, у которых каждый главный A -фактор централен. Следующие определения можно найти в книге⁴³.

Определение 2.1. Пусть F – непустой класс групп. Подгруппа H группы G называется F -максимальной в G , если $H \in F$ и из $H \leq U \leq G$ и $U \in F$ следует, что $U = H$.

Определение 2.2. Пусть F – непустой класс групп. Подгруппа H группы G называется F -проектором в G , если для любой $N \triangleleft G$ подгруппа HN/N является F -максимальной подгруппой в G/N .

Определение 2.3. Пусть F – непустой класс групп. Подгруппа H группы G называется F -покрывающей подгруппой группы G , если $H \in F$ и из того, что $H \leq U \leq G$, $V \triangleleft U$ и $U/V \in F$ следует, что $U = HV$.

Замечание 2.1. В работе⁴⁴ введены в рассмотрение понятия F^ω -проектора и F^ω -покрывающей подгруппы группы. F^ω -проектором группы G называется такая подгруппа H группы G , что для любой нормальной ω -подгруппы N группы G подгруппа HN/N является F -максимальной подгруппой в G/N ; F^ω -покрывающей подгруппой группы G называется такая подгруппа H группы G , что $H \in F$ и из того, что $H \leq U \leq G$, V – нормальная ω -подгруппа группы U и $U/V \in F$, следует, что $U = HV$. Отметим, что при $\omega = \pi(G)$ F^ω -проектор (F^ω -покрывающая подгруппа) группы становится ее F -проектором (F -покрывающей подгруппой).

Определение 2.4. Пусть F – непустой класс групп. Нормальная подгруппа K группы G называется F -корадикальной, если $G/K \in F$ и из $G/N \in F$, где $N \leq K$ следует, что $N = K$ (см., например, п. 1.2.8 работы⁴⁵).

Замечание 2.2. Если класс F является формацией, то F -корадикальная нормальная подгруппа в группе G единственна, обозначается через G^F и называется F -корадикалом группы G (см., например, § 1 книги⁴⁶).

Приведем известные результаты из теории конечных групп и теории классов конечных групп, используемые при доказательстве полученных утверждений.

Лемма 2.1⁴⁷. Если $M < \cdot G$ и N – неединичная нормальная подгруппа группы G такая, что $M \cap N = 1$, то $N \cdot \triangleleft G$.

⁴³ Монахов В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов. Минск: Выш. шк., 2006.

⁴⁴ Ведерников В.А., Сорокина М.М. F -проекторы и F -покрывающие подгруппы конечных групп // Сибирский математический журнал, 2016. Т. 57, № 6. С. 1224–1239.

⁴⁵ Каморников С.Ф., Селькин М.В. Подгрупповые функторы и классы конечных групп. Минск: Беларуская навука, 2003.

⁴⁶ Шеметков Л.А. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.

⁴⁷ Монахов В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов. Минск: Выш. шк., 2006, Лемма 4.39.

Лемма 2.2⁴⁸. Пусть A -операторная группа G обладает A -композиционным (конечным) рядом и G имеет нормальные A -допустимые подгруппы $N_1, N_2, \dots, N_r$. Тогда каждый A -композиционный фактор группы $G/\bigcap_{i=1,r} N_i$ A -изоморфен некоторому A -композиционному фактору хотя бы одной из групп $G/N_i, i = \overline{1,r}$.

Лемма 2.3⁴⁹. Пусть $N \triangleleft G$. Если $K \triangleleft G$ и $N \not\subseteq K$, то $NK/K \triangleleft G/K$.

Лемма 2.4⁵⁰. Пусть F – непустая формация, $K \triangleleft G$. Тогда $(G/K)^F = G^F K/K$.

Теорема 2.1⁵¹. Пусть F – непустая формация, ω – некоторое множество простых чисел. Следующие утверждения эквивалентны:

- 1) формация F является N_ω -насыщенной;
- 2) формация F ω -разрешимо насыщена.

Теорема 2.2⁵². Пусть Ω – непустой класс простых групп. Формация F является Ω -расслоенной с gn -направлением φ тогда и только тогда, когда F является (Z_p) -расслоенной формацией с направлением φ для любого $Z_p \in \Omega \cap K(F)$.

Теорема 2.3⁵³. Пусть f -корадикал группы G p -разрешим, f – p -однородный экран, M и H – f -абнормальные максимальные подгруппы группы G . Если $Core_G(M) \cap G^f = Core_G(H) \cap G^f$ и p делит $(|G:M|, |G:H|)$, то M и H сопряжены между собой в G .

Ω -примитивные группы

Определение 3.1. Группу G назовем Ω -примитивной, если в G существует максимальная подгруппа M такая, что $Core_G(M) \cap O_\Omega(G) = 1$, а M будем называть Ω -примитиватором группы G .

Замечание 3.1. Если $K(G) \subseteq \Omega$, то Ω -примитивная группа G становится примитивной группой, а M – ее примитиватором⁵⁴. Считаем, что в единичной группе не существует максимальной подгруппы. Поэтому единичная группа не является Ω -примитивной.

Доказательство следующей леммы аналогично доказательству леммы 2.3 из

⁴⁸ Ведерников В.А. Элементы теории классов групп. Смоленск: СГПИ, 1988, Лемма 3.7 главы 2.

⁴⁹ Монахов В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов. Минск: Выш. шк., 2006, Лемма 2.36 (3).

⁵⁰ Шеметков Л.А. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978, Лемма 1.2 (1).

⁵¹ Шеметков Л.А. Локальные задания формаций конечных групп // Фундаментальная и прикладная математика, 2010. Т. 16, № 8. С. 229–244, Теорема 4.5.

⁵² Ведерников В.А., Сорокина М.М. Ω -расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп // Дискретная математика, 2001. Т. 13, № 3. С. 125–144, Теорема 6.

⁵³ Шеметков Л.А. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978, Теорема 8.5.

⁵⁴ Монахов В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов. Минск: Выш. шк., 2006, пункт 4.6.

работы⁵⁵.

Лемма 3.1. Пусть G – Ω -примитивная группа с Ω -примитиватором M и $F := F(G)$ – подгруппа Фиттинга группы G . Тогда либо F – Ω' -группа, либо $F = F_p \times Q$, где $Z_p \in \Omega$, Q – Ω' -группа, F_p является единственной минимальной нормальной Ω -подгруппой группы G и $G = [F_p]M$.

Доказательство. По определению 3.1 $\text{Core}_G(M) \cap O_\Omega(G) = 1$. Пусть F не является Ω' -группой. Тогда существует простая группа $A \in K(F) \cap \Omega$. Так как F нильпотентна, то $A \cong Z_p$ для некоторого простого числа p . Это означает, что $F_p \subseteq O_\Omega(F)$ и поэтому $T := O_\Omega(F) \neq 1$. Допустим, что $T \subseteq M$. Поскольку подгруппа T является характеристической в F и $F \triangleleft G$, то $T \triangleleft G$ и, значит, $T \subseteq \text{Core}_G(M)$. Так как $T \subseteq O_\Omega(G)$, то

$$T \subseteq \text{Core}_G(M) \cap O_\Omega(G) = 1,$$

что, ввиду $T \neq 1$, невозможно. Таким образом, $T \not\subseteq M$ и поэтому $G = MT$.

Пусть $K := M \cap T$. Тогда $K \triangleleft M$ и $M \subseteq N_G(K)$. Так как T – нильпотентная группа, то $K \subseteq N_T(K)$ и, значит, $M \subseteq N_G(K)$. Следовательно, $K \triangleleft G$. Тогда $K \subseteq \text{Core}_G(M) \cap O_\Omega(G)$ и поэтому $K = 1$. Поскольку $G = MT$ и $M \cap T = 1$, то $G = [T]M$ и по лемме 2.1 T является минимальной нормальной подгруппой группы G . Так как $F_p \subseteq T$, то $T = F_p$, $F = F_p \times Q$, где Q – Ω' -группа, и $G = [F_p]M$.

Допустим, что в группе G существует минимальная нормальная Ω -подгруппа R , отличная от F_p . Тогда $F_p \times R$ является нормальной Ω -подгруппой в группе G . Пусть $D := M \cap F_p R$. Тогда $D \triangleleft M$. Покажем, что $D \triangleleft G$. Действительно, так как $F_p R = F_p \times R$, то

$$F_p \subseteq C_G(F_p R) \subseteq C_G(D) \subseteq N_G(D).$$

Из $M \subseteq N_G(D)$ получаем $G = F_p M \subseteq N_G(D)$. Поэтому $D \triangleleft G$. Тогда $D \triangleleft F_p R$ и, значит, D является Ω -группой. Отсюда следует, что $D \subseteq O_\Omega(G) \cap \text{Core}_G(M)$. Таким образом, $D = 1$. Поскольку $G = M F_p R$, $F_p R \triangleleft G$ и $M \cap F_p R = 1$, то по лемме 2.1 $F_p R \triangleleft G$. Это означает, что $F_p R = F_p$ и $R = F_p$. Получили противоречие. Следовательно, F_p является единственной минимальной нормальной Ω -подгруппой группы G .

Лемма доказана.

Теорема 3.1. Пусть G – Ω -примитивная группа, M – ее Ω -примитиватор и $O_\Omega(G) \neq 1$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:

- (1) группа G содержит единственную минимальную нормальную Ω -подгруппу N , $C_G(N) = N \times \text{Core}_G(M)$ и $G = [N]M$;
- (2) группа G содержит единственную минимальную нормальную Ω -подгруппу N , $C_G(N) = \text{Core}_G(M)$ и $G = NM$;
- (3) группа G содержит точно две минимальные нормальные Ω -подгруппы N_1

⁵⁵ Ведерников В.А., Сорокина М.М. F -проекторы и F -покрывающие подгруппы конечных групп // Сибирский математический журнал, 2016. Т. 57, № 6. С. 1224–1239.

и N_2 , причем $G = [N_1]M = [N_2]M$, $N_1 \cong N_2 \cong N_1 N_2 \cap M$, $C_G(N_i) = N_{3-i} \times \text{Core}_G(M)$, $i = 1, 2$.

Доказательство. Пусть $R := O_\Omega(G)$. Так как $R \neq 1$, то в группе G существует минимальная нормальная подгруппа N , содержащаяся в R . Если $N \subseteq M$, то $N \subseteq \text{Core}_G(M) \cap O_\Omega(G) = 1$, что невозможно. Следовательно, $N \not\subseteq M$ и поэтому $G = NM$.

Пусть $C := C_G(N)$. Тогда $C \triangleleft G$. Покажем, что $C \cap M = \text{Core}_G(M)$. Действительно, так как $C \cap M \triangleleft M$, то $M \subseteq N_G(C \cap M)$ и, ввиду $N \subseteq N_G(C \cap M)$, получаем $G = MN \subseteq N_G(C \cap M)$. Это означает, что $C \cap M \triangleleft G$ и $C \cap M \subseteq \text{Core}_G(M)$.

Проверим, что $\text{Core}_G(M) \subseteq C \cap M$. Если $N \cap \text{Core}_G(M) \neq 1$, то из $N \cdot \triangleleft G$ получаем $N \cap \text{Core}_G(M) = N$ и $N \subseteq \text{Core}_G(M)$, что, ввиду $N \not\subseteq M$, невозможно. Следовательно, $N \cap \text{Core}_G(M) = 1$ и $N \text{Core}_G(M) = N \times \text{Core}_G(M)$. Это означает, что $\text{Core}_G(M) \subseteq C_G(N) = C$. Таким образом, $\text{Core}_G(M) \subseteq C \cap M$. Тем самым установлено, что $C \cap M = \text{Core}_G(M)$.

Пусть $N \subseteq C$. Тогда N – элементарная абелева p -группа, где $Z_p \in \Omega$. Так как $N \subseteq F(G)$, то по лемме 3.1 $N = (F(G))_p$ – единственная минимальная нормальная Ω -подгруппа группы G , $G = [N]M$ и по модулярному тождеству

$$C = C \cap NM = N(C \cap M) = N \text{Core}_G(M) = N \times \text{Core}_G(M).$$

Следовательно, G – группа типа (1).

Пусть $N \cap C = 1$ и $C \subseteq M$. Тогда N – неабелева Ω -группа и $\text{Core}_G(M) = C$. Допустим, что в группе G существует минимальная нормальная Ω -подгруппа $L \neq N$. Тогда $L \subseteq C = \text{Core}_G(M)$ и $L \subseteq O_\Omega(G)$, что, ввиду $\text{Core}_G(M) \cap O_\Omega(G) = 1$, невозможно. Следовательно, N – единственная минимальная нормальная Ω -подгруппа группы G и G – группа типа (2).

Пусть $N \cap C = 1$ и $C \not\subseteq M$. Тогда N – неабелева Ω -группа и $G = CM$. Пусть G содержит две различные минимальные нормальные Ω -подгруппы N_1 и N_2 . Тогда можем считать, что $N_1 = N$ и N_2 – неабелевы группы, причем $N_i \not\subseteq M$, $i = 1, 2$. Следовательно, $G = M N_1 = M N_2$ и $N_1 \cap N_2 = 1$.

Покажем, что $M \cap N_1 = 1$. Так как $M \cap N_1 \triangleleft M$, то $M \subseteq N_G(M \cap N_1)$. Поскольку $N_1 N_2 = N_1 \times N_2$, то $N_2 \subseteq N_G(M \cap N_1)$. Тогда $G = M N_2 \subseteq N_G(M \cap N_1)$ и, значит, $M \cap N_1 \triangleleft G$. Ввиду того, что $N_1 \cdot \triangleleft G$, либо $M \cap N_1 = N_1$, либо $M \cap N_1 = 1$. Если $M \cap N_1 = N_1$, то $N_1 \subseteq M$, что невозможно. Следовательно, $M \cap N_1 = 1$. Аналогично получаем $M \cap N_2 = 1$. Тогда $G = [N_1]M = [N_2]M$. Так как $N_2 \subseteq C_G(N_1) = C$, то по модулярному тождеству $C = N_2(M \cap C) = N_2 \times \text{Core}_G(M)$. Аналогично, $C_G(N_2) = N_2 \times \text{Core}_G(M)$. Кроме того,

$$N_1 \cong N_1 / N_1 \cap N_2 \cong N_1 N_2 / N_2 = N_2 (N_1 N_2 \cap M) / N_2 \cong (N_1 N_2 \cap M) / (N_1 N_2 \cap M \cap N_2) \cong N_1 N_2 \cap M.$$

Аналогично, $N_2 \cong N_1 N_2 \cap M$. Допустим, что G содержит минимальную нормальную Ω -подгруппу N_3 , отличную от N_1 и N_2 . Тогда $C = N_2 \times \text{Core}_G(M) = (N_2 \times N_3) \text{Core}_G(M)$. Из

$$|C| = |N_2| \cdot |\text{Core}_G(M)| = (|N_2| \cdot |N_3| \cdot |\text{Core}_G(M)|) / |N_2 N_3 \cap \text{Core}_G(M)|$$

следует, что $|N_2 N_3 \cap \text{Core}_G(M)| = |N_3|$. Пусть $T := N_2 N_3 \cap \text{Core}_G(M)$. Тогда T – нормальная Ω -подгруппа группы G порядка, равного $|N_3|$. Так как $T \subseteq \text{Core}_G(M) \cap O_\Omega(G) = 1$, то $N_3 = 1$. Получили противоречие. Следовательно, группа G содержит точно две

минимальные нормальные Ω -подгруппы N_1 и N_2 . Тем самым установлено, что G – группа типа (3).

Теорема доказана.

Следствие 3.1 (Р. Бэр⁵⁶). Пусть G – примитивная группа, M – ее примитиватор. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:

- (1) группа G содержит единственную минимальную нормальную подгруппу N , $C_G(N)=N$ и $G = [N]M$;
- (2) группа G содержит единственную минимальную нормальную подгруппу N , $C_G(N)=1$ и $G = NM$;
- (3) группа G содержит точно две минимальные нормальные подгруппы N_1 и N_2 , причем $G = [N_1]M = [N_2]M$, $N_1 \cong N_2 \cong N_1 N_2 \cap M$, $C_G(N_i) = N_{3-i}$, $i = 1, 2$.

Ω -насыщенные и Ω -примитивно замкнутые классы групп

Определение 4.1. Пусть F и X – непустые классы групп, $F \subseteq X$.

- (1) Класс F назовем Ω -насыщенным классом в X , если для любой группы $G \in X$ и любой $N \triangleleft G$ такой, что $N \leq \Phi(G) \cap O_\Omega(G)$, из $G/N \in F$ следует, что $G \in F$.
- (2) Класс F назовем N_Ω -насыщенным классом в X , если для любой группы $G \in X$ и любой $N \triangleleft G$ такой, что $N \leq \Phi(O_\Omega(G))$, из $G/N \in F$ следует, что $G \in F$.

Доказательство следующей леммы осуществляется непосредственной проверкой соответствующих определений.

Лемма 4.1. Пусть X – непустой класс групп. Тогда справедливы следующие утверждения:

- (1) Всякий насыщенный класс в X является Ω -насыщенным в X ;
- (2) Всякий Ω -насыщенный класс в X является N_Ω -насыщенным в X ;
- (3) Если F – N_Ω -насыщенный класс в X и $K(F) \subseteq \Omega^+$, то F является насыщенным классом в X ;
- (4) Пусть $\pi(\Omega^+) = \omega$. Класс F является ω -насыщенным в X тогда и только тогда, когда F – Ω -насыщенный класс в X .

Доказательство. (1) Пусть F – насыщенный класс в X . Покажем, что F является Ω -насыщенным в X . Пусть $G \in X$, $N \triangleleft G$, $N \leq \Phi(G) \cap O_\Omega(G)$ и $G/N \in F$. Так как $N \leq \Phi(G)$, то в силу насыщенности класса F в X получаем, что $G \in F$. Это означает, что класс F является Ω -насыщенным в X .

- (2) Пусть F – Ω -насыщенный класс в X . Покажем, что класс F является N_Ω

⁵⁶ Baer R. Classes of finite groups and their properties // Illinois J. Math., 1957. V. 1. P. 115–187.

-насыщенным классом в $\mathcal{X}$. Пусть $G \in \mathcal{X}$, $N \triangleleft G$, $N \leq \Phi(O_\Omega(G))$ и $G/N \in \mathcal{F}$. Так как $\Phi(O_\Omega(G)) \subseteq \Phi(G) \cap O_\Omega(G)$, то, ввиду Ω -насыщенности класса $\mathcal{F}$ в $\mathcal{X}$, получаем, что $G \in \mathcal{F}$. Тем самым установлено, что $\mathcal{F} - N_\Omega$ -насыщенный класс в $\mathcal{X}$.

(3) Пусть $\mathcal{F} - N_\Omega$ -насыщенный класс в $\mathcal{X}$ и $K(\mathcal{F}) \subseteq \Omega^+$. Покажем, что $\mathcal{F}$ является насыщенным классом в $\mathcal{X}$. Пусть $G \in \mathcal{X}$, $N \triangleleft G$, $N \leq \Phi(G)$ и $G/N \in \mathcal{F}$. Так как $K(G/N) \subseteq \Omega^+$, $\pi(G/N) = \pi(G)$ и N нильпотентна, то $K(N) \subseteq \Omega^+$ и поэтому $K(G) \subseteq \Omega^+$. Следовательно, $O_\Omega(G) = G$ и, значит, $\Phi(O_\Omega(G)) = \Phi(G)$. Тогда, в силу N_Ω -насыщенности класса $\mathcal{F}$ в $\mathcal{X}$, справедливо $G \in \mathcal{F}$. Тем самым установлено, что $\mathcal{F} -$ насыщенный класс в $\mathcal{X}$.

(4) Необходимость. Пусть $\mathcal{F} - \omega$ -насыщенный класс в $\mathcal{X}$, $G \in \mathcal{X}$, $N \leq \Phi(G) \cap O_\Omega(G)$ и $G/N \in \mathcal{F}$. Тогда $N \leq \Phi(O_\Omega(G))$. Так как $K(\Phi(O_\Omega(G))) \subseteq \mathcal{A} \cap \Omega = \Omega^+$ и $\pi(\Omega^+) = \omega$, то $\pi(N) \subseteq \omega$ и, значит, $N \leq \Phi(G) \cap O_\omega(G)$. В силу ω -насыщенности класса $\mathcal{F}$ в $\mathcal{X}$ получаем, что $G \in \mathcal{F}$. Следовательно, $\mathcal{F} - \Omega$ -насыщенный класс в $\mathcal{X}$.

Достаточность. Пусть $\mathcal{F} - \Omega$ -насыщенный класс в $\mathcal{X}$. Покажем, что $\mathcal{F}$ является ω -насыщенным в $\mathcal{X}$. Пусть $G \in \mathcal{X}$, $N \leq \Phi(G) \cap O_\omega(G)$ и $G/N \in \mathcal{F}$. Так как N является нильпотентной ω -группой и $\pi(\Omega^+) = \omega$, то N является Ω^+ -группой и, значит, $N \leq \Phi(G) \cap O_\Omega(G)$. В силу Ω -насыщенности класса $\mathcal{F}$ в $\mathcal{X}$ получаем, что $G \in \mathcal{F}$. Следовательно, $\mathcal{F} - \omega$ -насыщенный класс в $\mathcal{X}$.

Лемма доказана.

Следствие 4.1. Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{X} -$ непустые классы групп, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{X}$ и $K(\mathcal{F}) \subseteq \Omega^+$.

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (1) $\mathcal{F} -$ насыщенный класс в $\mathcal{X}$;
- (2) $\mathcal{F} - \Omega$ -насыщенный класс в $\mathcal{X}$;
- (3) $\mathcal{F} - N_\Omega$ -насыщенный класс в $\mathcal{X}$.

Доказательство.

- (1) $\Rightarrow$ (2) – по лемме 4.1 (1).
- (2) $\Rightarrow$ (3) – по лемме 4.1 (2).
- (3) $\Rightarrow$ (1) – по лемме 4.1 (3).

Следствие доказано.

Лемма 4.2. Справедливы следующие утверждения:

- (1) Если $\mathcal{F} - N_\Omega$ -насыщенная формация и $\pi(\Omega^+) = \omega$, то $\mathcal{F}$ является N_ω -насыщенной формацией;
- (2) Пусть $\Omega = \Omega^+$. Формация $\mathcal{F}$ является N_Ω -насыщенной тогда и только тогда, когда $\mathcal{F} - \Omega$ -композиционная формация.

Доказательство. (1) Пусть F – N_Ω -насыщенная формация, $\pi(\Omega^+) = \omega$, $p \in \omega$ и $G/\Phi(O_p(G)) \in F$. Проверим, что $G \in F$. Поскольку $\omega = \pi(\Omega^+)$, то $Z_p \in \Omega$ и, значит, $O_p(G) \leq O_\Omega(G)$. Следовательно, $\Phi(O_p(G)) \subseteq \Phi(O_\Omega(G))$. Так как F – формация, то из $G/\Phi(O_p(G)) \in F$ следует, что $G/\Phi(O_\Omega(G)) \in F$. Тогда, в силу N_Ω -насыщенности формации F , справедливо $G \in F$. Тем самым установлено, что F – N_ω -насыщенная формация.

(2) Пусть $\omega := \pi(\Omega^+)$.

1. Необходимость. Из пункта (1) данной леммы следует, что формация F является N_ω -насыщенной. Так как $\Omega = \Omega^+$ и $\pi(\Omega^+) = \omega$, то по теореме 2.1 формация F является Ω -композиционной.

2. Достаточность. Пусть F – Ω -композиционная формация. Покажем, что F является N_Ω -насыщенной формацией. Пусть H – группа, $L \triangleleft H$, $L \leq \Phi(O_\Omega(H))$ и $H/L \in F$. Проверим, что $H \in F$. Так как $\Omega = \Omega^+$ и $\pi(\Omega^+) = \omega$, то $O_\Omega(H)$ – разрешимая ω -группа и, следовательно, $O_\Omega(H)$ ω -разрешима. Тогда $O_\Omega(H) \subseteq H_{\omega S}$ и, значит, $\Phi(O_\Omega(H)) \subseteq \Phi(H_{\omega S})$. Отсюда следует, что $L \leq \Phi(H_{\omega S})$. Согласно теореме 2.1, формация F является ω -разрешимо насыщенной и поэтому $H \in F$. Тем самым установлено, что F – N_Ω -насыщенная формация.

Лемма доказана.

Определение 4.2. Пусть F и X – непустые классы групп, $F \subseteq X$. Класс F назовем Ω -примитивно замкнутым в X или, коротко, ΩP -замкнутым в X , если для любой группы $G \in X$ из $G/(\text{Core}_G(M) \cap O_\Omega(G)) \in F$ для любой максимальной подгруппы M группы G следует, что $G \in F$. ΩP -замкнутый в X гомоморф коротко будем называть ΩP -гомоморфом в X . Будем говорить, что F – ΩP -замкнутый класс групп (ΩP -гомоморф), если F является ΩP -замкнутым классом (гомоморфом) в E .

Доказательство следующих двух лемм осуществляется непосредственной проверкой соответствующих определений.

Лемма 4.3. Пусть X – непустой класс групп. Тогда справедливы следующие утверждения:

- (1) Всякий P -гомоморф в X является ΩP -гомоморфом в X . В частности, каждый класс Шунка является ΩP -гомоморфом;
- (2) Если F – ΩP -замкнутый в X класс и $\Omega^+ = K(F)$, то F является P -замкнутым в X ;
- (3) Если F – ωP -гомоморф в X и $\pi(\Omega) \subseteq \omega$, то F является ΩP -гомоморфом в X .

Доказательство. (1) Пусть F – P -гомоморф в X . Покажем, что F является ΩP -замкнутым в X . Пусть $G \in X$ и $G/(Core_G(M) \cap O_\Omega(G)) \in F$ для любой $M < G$. Проверим, что $G \in F$. Так как $Core_G(M) \cap O_\Omega(G) \subseteq Core_G(M)$ для любой $M < G$ и F – гомоморф, то $G/Core_G(M) \in F$ для любой $M < G$. Поскольку класс F является P -замкнутым в X , то $G \in F$. Тем самым установлено, что F – ΩP -гомоморф в X .

(2) Пусть F – ΩP -замкнутый в X класс и $\Omega^+ = K(F)$. Покажем, что F P -замкнут в X . Пусть $G \in X$ и $G/Core_G(M) \in F$ для любой $M < G$. Проверим, что $G \in F$. Так как $\Phi(G) = \bigcap_{M < G} (Core_G(M))$, то по лемме 2.2 справедливо

$$K(G/\Phi(G)) = K(G/\bigcap_{M < G} (Core_G(M))) \subseteq \bigcup_{M < G} K(G/Core_G(M)) \subseteq K(F) = \Omega^+.$$

Поскольку $\Phi(G)$ нильпотентна, то $K(\Phi(G)) \subseteq \Omega$ и поэтому $K(G) \subseteq \Omega$. Следовательно, $O_\Omega(G) = G$ и, значит, $G/(Core_G(M) \cap O_\Omega(G)) \in F$ для любой $M < G$. Тогда в силу ΩP -замкнутости класса F в X справедливо $G \in F$. Тем самым установлено, что F – P -замкнутый в X класс.

(3) Пусть F – ωP -гомоморф в X и $\pi(\Omega) \subseteq \omega$. Покажем, что F является ΩP -замкнутым в X . Пусть $G \in X$, $G/(Core_G(M) \cap O_\Omega(G)) \in F$ для любой $M < G$. Проверим, что $G \in F$. Так как $\pi(\Omega) \subseteq \omega$, то $O_\Omega(G) \subseteq O_\omega(G)$ и, значит,

$$Core_G(M) \cap O_\Omega(G) \subseteq Core_G(M) \cap O_\omega(G)$$

для любой $M < G$. Поскольку F – гомоморф, то $G/(Core_G(M) \cap O_\omega(G)) \in F$ для любой подгруппы $M < G$. Тогда, в силу ωP -замкнутости класса F в X , получаем, что $G \in F$. Следовательно, класс F является ΩP -замкнутым в X .

Лемма доказана.

Следствие 4.2. Пусть F и X – непустые классы групп, $F \subseteq X$ и $\Omega^+ = K(F)$.

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (1) F – ΩP -гомоморф в X ;
- (2) F – P -гомоморф в X .

Лемма 4.4. Пусть X – непустой класс групп. Тогда справедливы следующие утверждения:

- (1) Всякий ΩP -гомоморф в X является Ω -насыщенным в X ;
- (2) Формация F является Ω -насыщенной в X тогда и только тогда, когда F является ΩP -замкнутой в X .

Доказательство. (1) Пусть F – ΩP -гомоморф в X . Покажем, что F – Ω -насыщенный в X класс. Пусть $G \in X$, $N < G$, $N \leq \Phi(G) \cap O_\Omega(G)$ и $G/N \in F$. Проверим, что $G \in F$. Так как класс F является гомоморфом, то $G/(\Phi(G) \cap O_\Omega(G)) \in F$.

Поскольку для любой $M < G$ справедливо $\Phi(G) \cap O_\Omega(G) \subseteq Core_G(M) \cap O_\Omega(G)$, то

$G/(Core_G(M) \cap O_\Omega(G)) \in F$ для любой $M < G$. Тогда в силу ΩP -замкнутости класса F в X получаем, что $G \in F$. Тем самым установлено, что F – Ω -насыщенный в X класс.

(2) 1. Необходимость. Пусть F – Ω -насыщенная в X формация. Покажем, что F – ΩP -замкнутый в X класс. Пусть $G \in X$ и для любой подгруппы $M < G$ полагаем $G/(Core_G(M) \cap O_\Omega(G)) \in F$. Проверим, что $G \in F$. Так как F – формация, то $G/(\Phi(G) \cap O_\Omega(G)) = G/((\bigcap_{M < G} Core_G(M)) \cap O_\Omega(G)) \in F$. Отсюда в силу Ω -насыщенности класса F получаем, что $G \in F$. Таким образом, F – ΩP -замкнутый в X класс.

2. Достаточность. Пусть F – ΩP -замкнутая в X формация. Тогда F – ΩP -замкнутый в X гомоморф и по пункту (1) данной леммы F – Ω -насыщенный в X класс.

Лемма доказана.

F_Ω -проекторы групп

Определение 5.1. Пусть F – непустой класс групп. Подгруппу H группы G назовем F_Ω -проектором в G , если для любой нормальной Ω -подгруппы N группы G подгруппа HN/N является F_Ω -максимальной подгруппой в G/N .

Замечание 5.1. Если $\Omega = I$, то $F_\Omega = F$ и, следовательно, F_Ω -проектор группы становится ее F -проектором.

Замечание 5.2. Если $\pi(\Omega) \subseteq \omega$ и Ω -подгруппа H группы G является F^ω -проектором в G , то H является F_Ω -проектором в G .

Лемма 5.1. Пусть F – непустой гомоморф, N – нормальная Ω -подгруппа группы G . Если H/N – F_Ω -проектор группы G/N и L – F_Ω -проектор группы H , то L является F_Ω -проектором группы G .

Доказательство. Пусть H/N – F_Ω -проектор группы G/N и L – F_Ω -проектор группы H . Так как N – нормальная Ω -подгруппа группы H , то по определению 5.1 подгруппа LN/N является F_Ω -максимальной в H/N . Поскольку H/N – F_Ω -проектор группы G/N и N/N – нормальная Ω -подгруппа группы G/N , то, ввиду определения 5.1, H/N – F_Ω -максимальная подгруппа в G/N и по определению 2.1 $H/N \in F_\Omega$. Это означает, что $LN/N = H/N$ и $H = LN$. Поскольку $K(H/N) \subseteq \Omega$ и $K(N) \subseteq \Omega$, то H является Ω -группой.

Покажем, что L является F_Ω -максимальной подгруппой в G . Действительно, так как L – F_Ω -проектор группы H , то, ввиду определения 5.1, $L \in F_\Omega$. Пусть $L \leq U \leq$

G и $U \in F_\Omega$. Покажем, что $U = L$. Поскольку F – гомоморф, то класс F_Ω также является гомоморфом и

$$H/N = LN/N \leq UN/N \cong U/(U \cap N) \in F_\Omega.$$

Так как подгруппа H/N F_Ω -максимальна в G/N , то $H/N = UN/N$. Следовательно, $U \leq H$. Тогда из F_Ω -максимальности подгруппы L в H получаем $L = U$ и, значит, L – F_Ω -максимальная подгруппа в G .

Предположим, что подгруппа L не является F_Ω -проектором группы G . Тогда найдется такая нормальная Ω -подгруппа A в G , что подгруппа LA/A не является F_Ω -максимальной в G/A . В этом случае в G/A существует подгруппа $B/A \in F_\Omega$ такая, что $LA/A \subset B/A$. Поскольку H/N – F_Ω -проектор группы G/N и AN/N – нормальная Ω -подгруппа в G/N , то $(H/N \cdot AN/N)/(AN/N) = (HA/N)/(AN/N)$ – F_Ω -максимальная подгруппа в $(G/N)/(AN/N)$ и поэтому HA/NA – F_Ω -максимальная подгруппа в G/NA . Так как

$$(B/A \cdot AN/A)/(AN/A) \cong BN/AN \cong B/(B \cap AN) \cong (B/A)/((B/A) \cap (AN/A)) \in F_\Omega$$

и $HA/NA = LNA/NA \leq BN/AN$, то из F_Ω -максимальности подгруппы HA/NA в G/NA получаем $HA = LNA = BN$. Тогда $B = B \cap ALN = AL(B \cap N) \leq AH$. Поскольку L – F_Ω -проектор группы H и $A \cap H$ – нормальная Ω -подгруппа в H , то $L(A \cap H)/(A \cap H)$ – F_Ω -максимальная подгруппа в $H/(A \cap H)$. Так как $L(A \cap H)/(A \cap H) \cong L/(L \cap H \cap A) = L/(L \cap A) \cong LA/A$ и $H/(H \cap A) \cong HA/A$, то LA/A – F_Ω -максимальная подгруппа в группе HA/A . Следовательно, из $LA/A \leq B/A \leq HA/A$ получаем, что $LA/A = B/A$. Противоречие. Таким образом, подгруппа L является F_Ω -проектором группы G .

Лемма доказана.

Теорема 5.1. Пусть $\mathcal{X}$ – наследственный гомоморф, F – непустой ΩP -гомоморф в $\mathcal{X}$ и $G \in \mathcal{X}$. Если G обладает разрешимой F_Ω -корадикальной Ω -подгруппой, то в G существует F_Ω -проектор.

Доказательство. Пусть N – разрешимая F_Ω -корадикальная Ω -подгруппа группы G . Предположим, что G не имеет F_Ω -проектора, причем G – группа наименьшего порядка с таким свойством. Тогда $G \notin F_\Omega$ и поэтому $N \neq 1$. Следовательно, $O_\Omega(G) \neq 1$. Пусть L – произвольная неединичная нормальная Ω -подгруппа группы G . Так как $NL/L \cong N/(N \cap L)$ – Ω -группа и

$$(G/L)/(NL/L) \cong G/NL \cong (G/N)/(NL/N) \in F_\Omega,$$

то группа G/L имеет разрешимую F_Ω -корадикальную Ω -подгруппу. Поскольку $G \in \mathcal{X}$ и $\mathcal{X}$ – гомоморф, то $G/L \in \mathcal{X}$. Так как $|G/L| < |G|$, то по индукции в G/L существует

F_Ω -проектор T/L . Тогда по определению 5.1 $((T/L)(NL/L))/(NL/L)$ является F_Ω -максимальной подгруппой в $(G/L)/(NL/L)$. Отсюда следует, что TN/NL является F_Ω -максимальной подгруппой в G/NL . Так как $G/NL \in F_\Omega$, то $TN = G$. Так как $K(T/L) \subseteq \Omega$ и $K(L) \subseteq \Omega$, то T является Ω -группой. Поскольку $G/N = TN/N \cong T/(T \cap N) \in F_\Omega$ и $T \cap N$ – нормальная Ω -подгруппа группы T , то T обладает разрешимой F_Ω -корадикальной Ω -подгруппой. В силу наследственности класса $\mathcal{X}$ из $G \in \mathcal{X}$ получаем, что $T \in \mathcal{X}$. Если T – собственная подгруппа в G , то ввиду выбора группы G в T существует F_Ω -проектор K . Тогда по лемме 5.1 K – F_Ω -проектор группы G . Получили противоречие. Следовательно, $T = G$. Это означает, что G/L – F_Ω -проектор в G/L и поэтому $G/L \in F_\Omega$. Таким образом, $G/L \in F_\Omega$ для любой нормальной Ω -подгруппы $L \neq 1$ группы G (5.1).

Покажем, что G – Ω -примитивная группа. Если $Core_G(M) \cap O_\Omega(G) \neq 1$ для любой $M < G$, то по (5.1) $G/(Core_G(M) \cap O_\Omega(G)) \in F_\Omega$ для любой $M < G$. Так как класс F является ΩP -гомоморфом в $\mathcal{X}$, то класс F_Ω также является ΩP -гомоморфом в $\mathcal{X}$. Отсюда получаем, что $G \in F_\Omega$, что невозможно. Следовательно, найдется максимальная подгруппа M в G такая, что $Core_G(M) \cap O_\Omega(G) = 1$. Это означает, что G – Ω -примитивная группа. Поскольку $O_\Omega(G) \neq 1$, то по теореме 3.1 группа G имеет не более двух минимальных нормальных Ω -подгрупп.

Покажем, что G обладает единственной минимальной нормальной Ω -подгруппой. Пусть A – минимальная нормальная Ω -подгруппа группы G . По (5.1) $G/A \in F_\Omega$. Предположим, что $A \cap M = 1$. Тогда $G = MA$. Проверим, что в этом случае M является F_Ω -проектором группы G .

Предварительно установим, что M – F_Ω -максимальная подгруппа группы G . Действительно,

$$M \cong M/1 = M/(M \cap A) \cong MA/A = G/A \in F_\Omega,$$

т.е. $M \in F_\Omega$. Пусть $M \leq U \leq G$ и $U \in F_\Omega$. Поскольку $M < G$ и $G \notin F_\Omega$, то $M = U$. Это означает, что M является F_Ω -максимальной подгруппой в G .

Пусть B – произвольная нормальная Ω -подгруппа группы G . Покажем, что MB/B – F_Ω -максимальная подгруппа в G/B . Если $B = 1$, то утверждение верно. Пусть $B \neq 1$. Если $B \subseteq M$, то $B \subseteq Core_G(M) \cap O_\Omega(G) = 1$, что невозможно. Поэтому $B \not\subseteq M$ и, значит, $G = MB$. Тогда, ввиду (5.1), $MB/B = G/B \in F_\Omega$. Это означает, что MB/B – F_Ω -максимальная подгруппа в G/B . Тем самым установлено, что M является F_Ω -проектором группы G . Получили противоречие. Следовательно, $M \cap A \neq 1$ и, в силу теоремы 3.1, A является единственной минимальной нормальной Ω -подгруппой

группы G . Тогда $A \subseteq N$ и поэтому A – абелева группа. С другой стороны, по теореме 3.1 A является неабелевой группой. Получили противоречие.

Теорема доказана.

Используя лемму 4.4 (2), из теоремы 5.1 непосредственно получаем следующий результат.

Следствие 5.1. Пусть F – непустая Ω -насыщенная формация. Если F_Ω -корадикал группы G является разрешимой Ω -группой, то в G существует F_Ω -проектор.

При $\Omega = I$ из следствия 5.1 вытекает следующий известный результат.

Следствие 5.2 (В. Гашюц⁵⁷, Х. Шунк⁵⁸, см. также теорему 15.3⁵⁹). Пусть F – непустая насыщенная формация. Тогда в любой разрешимой группе G существует F -проектор.

Доказательство следующей леммы осуществляется непосредственной проверкой соответствующих определений.

Лемма 5.2. Пусть F – непустой класс групп. Если H – F_Ω -проектор группы G и N – нормальная Ω -подгруппа в G , то HN/N – F_Ω -проектор группы G/N .

Доказательство. Пусть H – F_Ω -проектор группы G и N – нормальная Ω -подгруппа в G . Покажем, что HN/N – F_Ω -проектор в G/N . Пусть K/N – нормальная Ω -подгруппа группы G/N . Проверим, что $(HN/N \cdot K/N)/(K/N)$ – F_Ω -максимальная подгруппа группы G/N . Так как K/N – Ω -группа и N – Ω -группа, то K – нормальная Ω -подгруппа группы G . Поэтому HK/K – F_Ω -максимальная подгруппа в G/K . Поскольку

$$(HN/N \cdot K/N)/(K/N) = (HK/N)/(K/N) \cong HK/K$$

и $(G/N)/(K/N) \cong G/K$, то $(HN/N \cdot K/N)/(K/N)$ – F_Ω -максимальная подгруппа в $(G/N)/(K/N)$. Тем самым установлено, что HN/N – F_Ω -проектор группы G/N .

Лемма доказана.

Теорема 5.2. Пусть $\mathcal{X}$ – наследственный гомоморф и F – непустой подкласс класса $\mathcal{X}$. Если каждая группа $G \in \mathcal{X}$ с $O_\Omega(G) \neq 1$ обладает F_Ω -проектором, то справедливы следующие утверждения:

- (1) класс F_Ω является ΩP -замкнутым в $\mathcal{X}$;
- (2) если $H \in F_\Omega$ и N – нормальная Ω -подгруппа группы H , то $H/N \in F_\Omega$.

⁵⁷ Gaschutz W. Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen // Jour. Math. Z., V. 80, Issue 4, 1963. P. 300–305.

⁵⁸ Schunck H. H -Untergruppen in endlichen auflösbaren Gruppen // Math. Z., 1967. V. 97, Issue 4. P. 326–330.

⁵⁹ Шеметков Л.А. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.

Доказательство. Пусть каждая группа $G \in \mathcal{X}$ с $O_\Omega(G) \neq 1$ имеет по крайней мере один F_Ω -проектор.

(1) Покажем, что F_Ω является ΩP -замкнутым в $\mathcal{X}$ классом. Допустим, что существует группа $G_1 \in \mathcal{X} \setminus F_\Omega$ такая, что $G_1 / (Core_{G_1}(S) \cap O_\Omega(G_1)) \in F_\Omega$ для любой $S < G_1$, причем G_1 – группа наименьшего порядка с таким свойством. По условию теоремы в G_1 существует F_Ω -проектор R . Так как $R \in F_\Omega$, то $R \subset G_1$. Тогда найдется максимальная подгруппа M группы G_1 такая, что $R \subseteq M$. Пусть $M_1 := Core_{G_1}(M) \cap O_\Omega(G_1)$. Согласно определению 3.1, RM_1/M_1 – F_Ω -максимальная подгруппа группы G_1/M_1 . В силу выбора группы G_1 , справедливо $G_1/M_1 = RM_1/M_1$. Тогда $G_1 = RM_1 \subseteq M$. Получили противоречие. Тем самым установлено, что класс F_Ω является ΩP -замкнутым в $\mathcal{X}$.

(2) Пусть $H \in F_\Omega$ и N – нормальная Ω -подгруппа группы H . Покажем, что $H/N \in F_\Omega$. Если $N = 1$, то утверждение верно. Пусть $N \neq 1$. Тогда $O_\Omega(H) \neq 1$ и по условию в H существует F_Ω -проектор. Поскольку $H \in F_\Omega$, то H является F_Ω -проектором в H и по лемме 5.2 H/N является F_Ω -проектором в H/N . Следовательно, $H/N \in F_\Omega$.

Теорема доказана.

Из теоремы 5.2 при $\Omega = I$ получаем следующий известный результат.

Следствие 5.3 (Р. Эриксон⁶⁰). Пусть $\mathcal{X}$ – наследственный гомоморф и F – непустой подкласс класса $\mathcal{X}$. Если в любой группе $G \in \mathcal{X}$ существует F -проектор, то F является примитивно замкнутым в $\mathcal{X}$ гомоморфом.

F_Ω -покрывающие подгруппы и F_Ω -проекторы групп

Определение 6.1. Пусть F – класс групп. Подгруппу H группы G назовем F_Ω -покрывающей подгруппой группы G , если $H \in F_\Omega$ и из того, что $H \leq U \leq G$, V – нормальная Ω -подгруппа группы U и $U/V \in F_\Omega$ следует, что $U = HV$.

Замечание 6.1. Если $\Omega = I$, то F_Ω -покрывающая подгруппа группы становится ее F -покрывающей подгруппой.

Замечание 6.2. Если $\pi(\Omega) \subseteq \omega$ и H – F^ω -покрывающая Ω -подгруппа группы G , то H является F_Ω -покрывающей подгруппой в G .

Доказательство следующей леммы осуществляется простой проверкой соответствующих определений.

⁶⁰ Erickson R. Projectors of finite groups // Comm. Algebra, 1982. V. 10. P. 1919–1938.

Лемма 6.1. Пусть F – непустой гомоморф. Подгруппа H группы G является F_Ω -покрывающей подгруппой группы G тогда и только тогда, когда H является F_Ω -проектором каждой подгруппы группы G , в которой H содержится.

Доказательство. 1. Необходимость. Пусть H – F_Ω -покрывающая подгруппа группы G . Покажем, что H является F_Ω -проектором каждой подгруппы группы G , содержащей H . Предположим, что существует такая подгруппа K в G , что $H \subseteq K$, но H не является F_Ω -проектором в K . Тогда в K найдется нормальная Ω -подгруппа L такая, что HL/L не является F_Ω -максимальной подгруппой в K/L . Так как по определению 6.1 $H \in F_\Omega$ и F_Ω – гомоморф, то $HL/L \in F_\Omega$. Пусть M/L – F_Ω -максимальная подгруппа в K/L , содержащая HL/L . Тогда $HL < M$. С другой стороны, поскольку $H \leq M \leq G$, L – нормальная Ω -подгруппа в M и $M/L \in F_\Omega$, то по определению 6.1 $M = HL$. Получили противоречие. Следовательно, H является F_Ω -проектором в любой подгруппе группы G , содержащей H .

2. Достаточность. Пусть H является F_Ω -проектором каждой подгруппы группы G , в которой H содержится. Ввиду определений 5.1 и 2.1, $H \in F_\Omega$. Пусть $H \leq U \leq G$, V – нормальная Ω -подгруппа группы U и $U/V \in F_\Omega$. По условию H является F_Ω -проектором в U . Так как V – нормальная Ω -подгруппа в U , то по определению 5.1 HV/V – F_Ω -максимальная подгруппа в U/V . Отсюда в силу $U/V \in F_\Omega$ получаем $HV/V = U/V$ и, значит, $U = HV$. Тогда по определению 6.1 H является F_Ω -покрывающей подгруппой группы G .

Лемма доказана.

Лемма 6.2. Пусть F – гомоморф и G – группа. Тогда справедливы следующие утверждения:

(1) Если H – F_Ω -проектор группы G и H – максимальная подгруппа группы G , то H является F_Ω -покрывающей подгруппой в G ;

(2) Если H – F_Ω -покрывающая подгруппа группы G и $H \leq K \leq G$, то H является F_Ω -покрывающей подгруппой в K ;

(3) Если H – F_Ω -покрывающая подгруппа группы G и N – нормальная Ω -подгруппа в G , то HN/N является F_Ω -покрывающей подгруппой в G/N ;

(4) Если N – нормальная Ω -подгруппа в G , H – разрешимая подгруппа в G и H/N – F_Ω -покрывающая подгруппа в G/N , то каждая F_Ω -покрывающая подгруппа из H является F_Ω -покрывающей подгруппой в G ;

(5) Если N – нормальная Ω -подгруппа в G , H/N – F_Ω -покрывающая подгруппа в G/N и $H \in F$, то H является F_Ω -покрывающей подгруппой в G .

Доказательство. (1) Пусть H – F_Ω -проектор группы G , $H < G$, $H \leq U \leq G$, V – нормальная Ω -подгруппа группы U и $U/V \in F_\Omega$. Проверим, что $U = HV$. В силу максимальности H в G либо $H = U$, либо $U = G$. Если $H = U$, то $U = UV = HV$. Пусть $U = G$. Так как H – F_Ω -проектор группы $G = U$ и V – нормальная Ω -подгруппа группы G , то по определению 5.1 HV/V – F_Ω -максимальная подгруппа группы G/V . Поскольку $G/V = U/V \in F_\Omega$, то $HV/V = G/V$ и поэтому $HV = G = U$. Таким образом, H является F_Ω -покрывающей подгруппой в G .

(2) Доказательство непосредственно следует из определения 6.1.

(3) Пусть H – F_Ω -покрывающая подгруппа группы G и N – нормальная Ω -подгруппа в G . Покажем, что HN/N является F_Ω -покрывающей подгруппой в G/N . Согласно лемме 6.1, H является F_Ω -проектором группы G . Тогда по лемме 5.2 HN/N – F_Ω -проектор группы G/N . Пусть K/N – подгруппа в G/N , содержащая HN/N . Покажем, что HN/N является F_Ω -проектором в K/N . Действительно, так как $H \leq K$, то по пункту (2) данной леммы подгруппа H является F_Ω -покрывающей подгруппой в K и, ввиду леммы 6.1, H – F_Ω -проектор в K . Отсюда по лемме 5.2 получаем, что HN/N – F_Ω -проектор в K/N . Это, согласно лемме 6.1, означает, что HN/N является F_Ω -покрывающей подгруппой в G/N .

(4) Пусть N – нормальная Ω -подгруппа группы G , H – разрешимая подгруппа в G , H/N – F_Ω -покрывающая подгруппа в G/N и K – F_Ω -покрывающая подгруппа группы H . Покажем, что K является F_Ω -покрывающей подгруппой в G . Согласно лемме 6.1, K является F_Ω -проектором в H . Тогда по определению 5.1 KN/N – F_Ω -максимальная подгруппа в H/N . Так как H/N – F_Ω -покрывающая подгруппа в G/N , то по определению 6.1 $H/N \in F_\Omega$. Поэтому $KN/N = H/N$ и $H = KN$. Из того, что K – F_Ω -проектор в H , N – нормальная Ω -подгруппа группы G и H/N – F_Ω -проектор в G/N , по лемме 5.1 получаем, что подгруппа K является F_Ω -проектором в G .

Пусть $K \leq U \leq G$, V – нормальная Ω -подгруппа группы U и $U/V \in F_\Omega$. Проверим, что $U = KV$. Так как $H = KN \leq UN$, то $H/N = KN/N \leq UN/N \leq G/N$. Поскольку VN/N – нормальная Ω -подгруппа в UN/N и H/N – F_Ω -покрывающая подгруппа в G/N , то по определению 6.1 $UN/N = H/N \cdot VN/N = HVN/N = KVN/N$ и, значит, $UN = KVN$. Так как $K(U \cap N) = U \cap KN = U \cap H$, то $U = U \cap UN = U \cap KVN = KV(U \cap N) = (U \cap H)V$. Тогда

$$U/V = (U \cap H)V/V \cong (U \cap H)/(U \cap H \cap V) = (U \cap H)/(V \cap H) \in F_\Omega.$$

Поскольку H – разрешимая Ω -группа, то $V \cap H$ также является Ω -группой. Таким образом, $K \leq U \cap H \leq H$, $V \cap H$ – нормальная Ω -подгруппа в $U \cap H$ и $(U \cap H)/(V \cap H) \in F_\Omega$. Тогда по определению 6.1 $U \cap H = K(V \cap H)$ и поэтому $U = V(U \cap H) = V(V \cap H)K = VK$.

Следовательно, $K - F_\Omega$ -покрывающая подгруппа в G .

(5) Пусть N – нормальная Ω -подгруппа группы G , $H/N - F_\Omega$ -покрывающая подгруппа в G/N и $H \in F$. Покажем, что H является F_Ω -покрывающей подгруппой в G . Пусть $H \leq U \leq G$, V – нормальная Ω -подгруппа группы U и $U/V \in F_\Omega$. Тогда $H/N \leq UN/N \leq G/N$, VN/N – нормальная Ω -подгруппа в UN/N и

$$(UN/N)/(VN/N) \cong UN/VN \cong U/(U \cap VN) \cong (U/V)/((U \cap VN)/V) \in F_\Omega.$$

Согласно определению 6.1, $UN/N = H/N \cdot VN/N = HV/N$ и, значит, $UN = HV$. Тогда $U = U \cap UN = U \cap HV = H(U \cap V) = HV$. Так как $H \in F$ и $K(H) \subseteq \Omega$, то $H \in F_\Omega$. Следовательно, по определению 6.1 H является F_Ω -покрывающей подгруппой в G .

Лемма доказана.

Замечание 6.3. Следуя книге⁶¹ (см. также пункт 5.2⁶²), через $Proj_{F_\Omega}(G)$ обозначим совокупность всех F_Ω -проекторов группы G , $Cov_{F_\Omega}(G)$ – совокупность всех F_Ω -покрывающих подгрупп группы G , $Comp_G(A)$ – совокупность всех дополнений к нормальной подгруппе A в G .

Теорема 6.1. Пусть X – наследственный гомоморф, F – непустой ΩP -гомоморф в X , $G \in X \setminus F_\Omega$, A – абелева минимальная нормальная Ω -подгруппа группы G , $G/A \in F_\Omega$. Тогда $Proj_{F_\Omega}(G) = Cov_{F_\Omega}(G) = Comp_G(A)$.

Доказательство. Согласно теореме 5.1, $Proj_{F_\Omega}(G) \neq \emptyset$. Применим индукцию по порядку группы G . Пусть $H - F_\Omega$ -проектор группы G . Тогда из определений 5.1 и 2.1 следует, что $H \in F_\Omega$. Согласно лемме 5.2, HA/A является F_Ω -проектором группы G/A . По условию теоремы $G/A \in F_\Omega$. Это означает, что $HA/A = G/A$ и $G = HA$. Если $G = H$, то $G \in F_\Omega$, что противоречит условию теоремы. Поэтому $G \neq H$.

Из $G = HA$ получаем, что $A \not\subseteq H$. Так как A – абелева группа, то подгруппа $A \cap H$ нормальна в G . Поскольку A – минимальная нормальная подгруппа группы G и $A \not\subseteq H$, то $A \cap H = 1$. Таким образом, $G = [A]H$ и H – максимальная подгруппа в G . Тогда по лемме 6.2 (1) H является F_Ω -покрывающей подгруппой в G . Поэтому $Proj_{F_\Omega}(G) \subseteq Cov_{F_\Omega}(G)$. Из леммы 6.1 следует, что $Cov_{F_\Omega}(G) \subseteq Proj_{F_\Omega}(G)$. Следовательно, $Proj_{F_\Omega}(G) = Cov_{F_\Omega}(G)$. Из $G = [A]H$ получаем, что $H \notin Comp_G(A)$. Таким образом,

$$Cov_{F_\Omega}(G) = Proj_{F_\Omega}(G) \subseteq Comp_G(A).$$

Пусть $B \in Comp_G(A)$. Тогда $G = [A]B$ и B – максимальная подгруппа группы G . Рассмотрим случай, когда $Core_G(H \cap B) \cap O_\Omega(G) \neq 1$. Пусть N – минимальная

⁶¹ Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992.

⁶² Монахов В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов. Минск: Выш. шк., 2006.

нормальная Ω -подгруппа группы G , содержащаяся в пересечении $H \cap B$. Так как

$$(AN/N) \cap (B/N) = (AN \cap B)/N = N(AN \cap B)/N = N/N,$$

то $G/N = [AN/N](B/N)$ и $B/N \in \text{Comp}_{G/N}(AN/N)$. Проверим, что для G/N справедливо условие теоремы. Действительно, так как $N \subseteq H \cap B$, то $A \not\subseteq N$ и, ввиду леммы 2.3, AN/N – абелева минимальная нормальная Ω -подгруппа в G/N . Далее, поскольку класс F_Ω является гомоморфом, то

$$(G/N)/(AN/N) \cong G/AN \cong (G/A)/(AN/A) \in F_\Omega.$$

Так как $G \in \mathcal{X}$ и $\mathcal{X}$ – гомоморф, то $G/N \in \mathcal{X}$. Покажем, что $G/N \in F_\Omega$. Так как $N \subseteq O_\Omega(G)$, то, согласно лемме 5.2, H/N – F_Ω -проектор группы G/N . Если $G/N \in F_\Omega$, то $H/N = G/N$, а значит, $G = H \in F_\Omega$, что невозможно. Поэтому $G/N \notin F_\Omega$. Таким образом, группа G/N удовлетворяет условию теоремы. Тогда по индукции $B/N \in \text{Cov}_{F_\Omega}(G/N)$. Так как $B \cong G/A \in F$, то по лемме 6.2 (5) $B \in \text{Cov}_{F_\Omega}(G)$. Таким образом, в случае, когда $\text{Core}_G(H \cap B) \cap O_\Omega(G) \neq 1$, получаем

$$\text{Comp}_G(A) \subseteq \text{Cov}_{F_\Omega}(G) = \text{Proj}_{F_\Omega}(G).$$

Пусть теперь $\text{Core}_G(H \cap B) \cap O_\Omega(G) = 1$. Предположим, что справедливо неравенство $\text{Core}_G(B) \cap O_\Omega(G) \neq 1$ и K – минимальная нормальная Ω -подгруппа группы G , содержащаяся в B . Пусть $T := AK \cap H$. Покажем, что подгруппа T является нормальной в G . В самом деле, так как $AK = A \times K$ и A – абелева группа, то $A \subseteq C_G(AK)$ и поэтому $A \subseteq N_G(T)$. Ввиду $H \subseteq N_G(T)$, получаем $G = HA \subseteq N_G(T)$. Следовательно, T – нормальная Ω -подгруппа в G . В силу $\text{Core}_G(H \cap B) \cap O_\Omega(G) = 1$, имеем $T \not\subseteq B$. Поскольку B – максимальная подгруппа группы G , то $G = TB$. Тогда из $B \in F_\Omega$ получаем

$$G/T = BT/T \cong B/B \cap T \in F_\Omega.$$

Из $H \in \text{Proj}_{F_\Omega}(G)$ по лемме 5.2 следует, что $H/T \in \text{Proj}_{F_\Omega}(G/T)$. Поскольку $G/T \in F_\Omega$, то $G = H$, что невозможно. Следовательно, $\text{Core}_G(B) \cap O_\Omega(G) = 1$. Тогда для любой неединичной нормальной Ω -подгруппы L группы G справедливо $L \not\subseteq B$ и поэтому $G = BL$. Так как $B \in F_\Omega$, то $G/L = BL/L \in F_\Omega$. Таким образом, BL/L – F_Ω -максимальная подгруппа в G/L для любой нормальной Ω -подгруппы L из G . Согласно определению 5.1, B является F_Ω -проектором в G и поэтому $\text{Comp}_G(A) \subseteq \text{Proj}_{F_\Omega}(G) = \text{Cov}_{F_\Omega}(G)$. Тем самым установлено, что $\text{Proj}_{F_\Omega}(G) = \text{Cov}_{F_\Omega}(G) = \text{Comp}_G(A)$.

Теорема доказана.

Поскольку, согласно лемме 4.3 (1), всякий класс Шунка является ΩP -гомоморфом, то при $\Omega = I$ и $\mathcal{X} = E$ из теоремы 6.1 непосредственно вытекает следующий известный результат.

Следствие 6.1 (теорема 5.19⁶³). Пусть F – класс Шунка, A – минимальная нормальная подгруппа группы G , причем $G \notin F$ и $G/A \in F$. Если A абелева, то

$$\text{Proj}_F(G) = \text{Cov}_F(G) = \text{Comp}_G(A).$$

Теорема 6.2. Пусть X – наследственный гомоморф, F – непустой ΩP -гомоморф в X , $G \in X$ и N – нильпотентная нормальная Ω -подгруппа группы G , H – F_Ω -подгруппа в G такая, что $G = HN$. Тогда справедливы следующие утверждения:

(1) H содержится в некотором F_Ω -проекторе группы G . В частности, если H – F_Ω -максимальная подгруппа группы G , то H является F_Ω -проектором в G ;

(2) Если H – разрешимая группа, то H содержится в некоторой разрешимой F_Ω -покрывающей подгруппе группы G . В частности, если H – разрешимая F_Ω -максимальная подгруппа группы G , то H – F_Ω -покрывающая подгруппа в G .

Доказательство. (1) Применим индукцию по порядку группы G . Если $G \in F_\Omega$, то G – F_Ω -проектор в G . В этом случае утверждение верно. Пусть $G \notin F_\Omega$. Если $N = 1$, то $H = G$ – F_Ω -проектор в G и утверждение верно. Пусть $N \neq 1$ и A – минимальная нормальная подгруппа группы G , содержащаяся в N . Так как N – нильпотентная Ω -группа, то A – абелева минимальная нормальная Ω -подгруппа группы G . Покажем, что для G/A выполняется условие теоремы. Действительно, N/A – нильпотентная нормальная Ω -подгруппа группы G/A . В силу того, что класс X является гомоморфом, $G/A \in X$. Так как $H \in F_\Omega$ и F_Ω – гомоморф, то $HA/A \in F_\Omega$. Поскольку $G = HN$, то $G/A = (HA/A)(N/A)$. Таким образом, по индукции для G/A выполняется заключение теоремы. Это означает, что существует F_Ω -проектор K/A в группе G/A такой, что $HA/A \subseteq K/A$.

Рассмотрим случай, когда $K < G$. Покажем, что K удовлетворяет условию теоремы. В самом деле, $K \cap N$ – нильпотентная нормальная Ω -подгруппа группы K , H – F_Ω -подгруппа в K , и справедливы равенства

$$K = G \cap K = HN \cap K = H(N \cap K).$$

Ввиду наследственности класса X , имеем $K \in X$. Тогда по индукции существует F_Ω -проектор R группы K , содержащий H . Отсюда, согласно лемме 5.1, получаем, что R – F_Ω -проектор в G . Таким образом, в данном случае утверждение верно.

Пусть теперь $G = K$. Тогда $G/A = K/A \in F_\Omega$. Так как A – Ω -группа, то группа G обладает разрешимой F_Ω -корадикальной Ω -подгруппой и по теореме 3.1 группа G обладает F_Ω -проектором. Пусть T – F_Ω -проектор группы G . Поскольку F является ΩP -гомоморфом, то, согласно теореме 6.1, T является дополнением к A в G . Так как

⁶³ Монахов В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов. Минск: Выш. шк., 2006.

$G = [A]T$ и A – абелева минимальная нормальная Ω -подгруппа в G , то T – максимальная подгруппа в G . Покажем, что подгруппа $N \cap T$ нормальна в G . Действительно, поскольку подгруппа A нормальна в N и N нильпотентна, то $A \subseteq C_G(N)$ и поэтому $A \subseteq N_G(N \cap T)$. Тогда $G = TA \subseteq N_G(N \cap T)$ и, значит, $N \cap T$ – нормальная Ω -подгруппа группы G . Если $N \cap T \neq 1$, то подгруппу A можно выбрать содержащейся в пересечении $N \cap T$. Тогда $G = TA = T \in F_\Omega$, что невозможно. Следовательно, $N \cap T = 1$. Тогда из $A \subseteq N$ и $G = [A]T = [N]T$ получаем $N = A$ – минимальная нормальная Ω -подгруппа в G . Кроме того, $H \cap N$ – нормальная подгруппа в G . Если $H \cap N = N$, то $N \subseteq H$ и $G = HN = H \in F_\Omega$, что невозможно. Таким образом, $H \cap N = 1$ и подгруппа H является дополнением к N в G . Тогда по теореме 6.1 H – F_Ω -проектор группы G , содержащий H .

(2) Пусть H – разрешимая группа. Применим индукцию по порядку группы G . Рассуждая как в пункте (1), получим, что $G \notin F_\Omega$, $N \neq 1$ и для G/A выполняется условие теоремы, где A – минимальная нормальная подгруппа группы G , содержащаяся в N . Тогда по индукции в G/A существует разрешимая F_Ω -покрывающая подгруппа K/A такая, что $HA/A \subseteq K/A$. Отсюда следует, что K – разрешимая группа.

Пусть $K < G$. Тогда, как и в пункте (1) данной теоремы, K удовлетворяет условию теоремы и по индукции в K существует разрешимая F_Ω -покрывающая подгруппа R , содержащая H . Отсюда, согласно лемме 6.2 (4), получаем, что R – F_Ω -покрывающая подгруппа в G .

Пусть $G = K$. Тогда, рассуждая, как и в пункте (1) данной теоремы, по теореме 6.1 получим, что H – F_Ω -покрывающая подгруппа группы G .

Теорема доказана.

При $\Omega = I$ из теоремы 6.2 непосредственно получаем следующий известный результат.

Следствие 6.2 (В. Гашюц, лемма III.3.14⁶⁴). Пусть F – класс Шунка, G – группа, N – нильпотентная нормальная подгруппа группы G . Если H – F -максимальная подгруппа группы G такая, что $G = HN$, то H является F -проектором группы G .

Теорема 6.3. Пусть X – наследственный гомоморф, F – непустой ΩP -гомоморф в X , G – X -группа, обладающая разрешимой F_Ω -корадикальной Ω -подгруппой. Разрешимая подгруппа H группы G является F_Ω -проектором в G в том и только в том случае, когда H – F_Ω -покрывающая подгруппа в G .

⁶⁴ Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992.

Доказательство. 1. *Необходимость.* Пусть H – F_Ω -проектор группы G и L – разрешимая F_Ω -корадикальная Ω -подгруппа в G . Согласно определению 5.1, H является F_Ω -максимальной подгруппой в группе G . Применяя индукцию по порядку группы G , покажем, что H является F_Ω -покрывающей подгруппой в G . Если $G \in F_\Omega$, то утверждение верно. Пусть $G \notin F_\Omega$. Тогда $L \neq 1$ и существует минимальная нормальная Ω -подгруппа A группы G , содержащаяся в L . Так как $(G/A)/(L/A) \cong G/L \in F_\Omega$, то G/A обладает разрешимой F_Ω -корадикальной Ω -подгруппой. Поскольку $G \in \mathcal{X}$ и $\mathcal{X}$ – гомоморф, то $G/A \in \mathcal{X}$. Согласно лемме 5.2, подгруппа HA/A является F_Ω -проектором группы G/A и по индукции HA/A – F_Ω -покрывающая подгруппа в G/A . Пусть $K := HA$. Тогда $K/A = HA/A \cong H/(H \cap A)$ и, значит, K – разрешимая группа.

Покажем, что для группы K выполняется условие теоремы 6.2. Действительно, A – нильпотентная нормальная Ω -подгруппа в K и H – разрешимая F_Ω -подгруппа в K . Так как $\mathcal{X}$ – наследственный класс, то $K \in \mathcal{X}$. Поскольку H – F_Ω -максимальная подгруппа в G , то H – F_Ω -максимальная подгруппа в K . Тогда по теореме 6.2 (2) H является F_Ω -покрывающей подгруппой в K . Так как K/A – F_Ω -покрывающая подгруппа в G/A , то, согласно лемме 6.2 (4), H – F_Ω -покрывающая подгруппа в G .

2. *Достаточность.* Пусть H – F_Ω -покрывающая подгруппа группы G . Тогда по лемме 6.1 H является F_Ω -проектором группы G .

Теорема доказана.

Следствие 6.3. Пусть $\mathcal{X}$ – наследственный гомоморф, $\Omega = \Omega^+$, F – непустой ΩP -гомоморф в $\mathcal{X}$, G – $\mathcal{X}$ -группа, обладающая F_Ω -корадикальной Ω -подгруппой. Подгруппа H группы G является F_Ω -проектором в G в том и только в том случае, когда H – F_Ω -покрывающая подгруппа в G .

Ввиду леммы 4.4 (2), справедлив следующий результат.

Следствие 6.4. Пусть F – непустая Ω -насыщенная формация и G – группа с разрешимым F_Ω -корадикалом, являющимся Ω -группой. Разрешимая подгруппа H группы G является F_Ω -проектором в G тогда и только тогда, когда H – F_Ω -покрывающая подгруппа в G .

Теорема 6.4. Пусть F – Ω -композиционная формация, F_Ω -корадикал группы G является разрешимой $(\Omega \cap K(F))$ -группой. Тогда любые две F_Ω -покрывающие подгруппы группы G сопряжены в G .

Доказательство. Пусть H_1 и H_2 – F_Ω -покрывающие подгруппы группы G . Покажем, что H_1 и H_2 сопряжены в G . Применим индукцию по порядку группы G .

Если $G \in \mathcal{F}_\Omega$, то $H_1 = G = H_2$ и утверждение верно. Следовательно, $G \notin \mathcal{F}_\Omega$ и поэтому $G^{\mathcal{F}_\Omega} \neq 1$. Пусть L – минимальная нормальная подгруппа группы G , содержащаяся в $G^{\mathcal{F}_\Omega}$. Тогда L является абелевой p -группой для некоторого простого числа p такого, что $Z_p \in \Omega_1 := \Omega \cap K(\mathcal{F})$. Так как $G^{\mathcal{F}_\Omega}$ является Ω -группой, то группа G также является Ω -группой. Это означает, что $G \notin \mathcal{F}$ и $G^{\mathcal{F}} \neq 1$.

Согласно лемме 6.2 (3) H_1L/L и H_2L/L – $\mathcal{F}_\Omega$ -покрывающие подгруппы в G/L . Проверим, что для G/L выполняется условие теоремы. Действительно, по лемме 2.4 справедливо равенство $(G/L)^{\mathcal{F}_\Omega} = G^{\mathcal{F}_\Omega}L/L$ и поэтому $(G/L)^{\mathcal{F}_\Omega}$ – разрешимая Ω_1 -группа. Тогда по индукции H_1L/L и H_2L/L сопряжены в G/L . Следовательно, найдется такой элемент $x \in G$, что $H_1L/L = H_2^xL/L$ и, значит, $H_1L = H_2^xL$. Поскольку H_2 – $\mathcal{F}_\Omega$ -покрывающая подгруппа группы G , то нетрудно проверить, что H_2^x является $\mathcal{F}_\Omega$ -покрывающей подгруппой в G . Тогда по лемме 6.2 (2) H_1 и H_2^x – $\mathcal{F}_\Omega$ -покрывающие подгруппы в группе H_1L . Так как $H_1L/L \in \mathcal{F}_\Omega$, то справедливо включение $(H_1L)^{\mathcal{F}_\Omega} \subseteq L$ и поэтому $(H_1L)^{\mathcal{F}_\Omega}$ – разрешимая Ω_1 -группа. Если $H_1L < G$, то по индукции существует $y \in H_1L$ такой, что $H_1 = (H_2^x)^y$ и, значит, H_1 и H_2 сопряжены в G .

Пусть $G = H_1L = H_2^xL$. Если $\text{Core}_G(H_1) \cap O_\Omega(G) \neq 1$, то L можно выбрать так, чтобы $L \subseteq H_1$. Тогда $G = H_1L = H_1 \in \mathcal{F}_\Omega$ и, значит, $G = H_1 = H_2$. Аналогично, если $\text{Core}_G(H_2^x) \cap O_\Omega(G) \neq 1$, то можем считать, что $L \subseteq H_2^x$. Тогда $G = H_2^xL = H_2^x \in \mathcal{F}_\Omega$ и $G = H_2^x = H_1$. Следовательно,

$$\text{Core}_G(H_1) \cap O_\Omega(G) = \text{Core}_G(H_2^x) \cap O_\Omega(G) = 1.$$

Так как L является абелевой группой, то $L \cap H_1 = L \cap H_2^x = 1$ и $G = [L]H_1 = [L]H_2^x$. Поскольку $G/L = H_1L/L \in \mathcal{F}_\Omega$, то $G^{\mathcal{F}_\Omega} \subseteq L$ и поэтому $L = G^{\mathcal{F}_\Omega}$. Так как L – минимальная нормальная подгруппа группы G и $G^{\mathcal{F}}$ – неединичная нормальная подгруппа группы G , содержащаяся в $G^{\mathcal{F}_\Omega} = L$, то $G^{\mathcal{F}} = L = G^{\mathcal{F}_\Omega}$. В силу абелевости подгруппы L получаем, что H_1 и H_2^x – максимальные подгруппы в G , причем подгруппы H_1 и H_2^x $\mathcal{F}$ -абнормальны в группе G . Поскольку $Z_p \in \Omega \cap K(\mathcal{F})$, то, согласно теореме 2.2, $\mathcal{F}$ – (Z_p) -композиционная формация. Кроме того, $\text{Core}_G(H_1) \cap G^{\mathcal{F}} = \text{Core}_G(H_2^x) \cap G^{\mathcal{F}}$, $G^{\mathcal{F}}$ – разрешимая, а значит, и p -разрешимая группа, $|G:H_1|$ и $|G:H_2^x|$ – p -числа. Тогда по теореме 2.3 подгруппы H_1 и H_2^x являются сопряженными в G . Тем самым установлено, что H_1 и H_2 сопряжены в G .

Теорема доказана.

При $\Omega = I$ из теоремы 6.4 вытекает следующий результат.

Следствие 6.5. Пусть $\mathcal{F}$ – композиционная формация, $\mathcal{F}$ -корадикал группы G

является разрешимой ($K(F)$)-группой. Тогда любые две F -покрывающие подгруппы из G сопряжены в G .

Заключение

Исследования свойств F_Ω -проекторов и F_Ω -покрывающих подгрупп конечной группы для произвольного Ω -примитивно замкнутого гомоморфа (Ω -композиционной формации) F продолжают исследования, инициированные В.А. Ведерниковым и М.М. Сорокиной в работе⁶⁵, тем самым получено дальнейшее продвижение в решении проблемы⁶⁶ К. Дерка и Т. Хоукса о расширении универсума, для которого работает теория проекторов, за пределы класса S всех конечных разрешимых групп.

Основные результаты главы анонсированы на Международной конференции «Groups and Graphs, Metrics and Manifolds»⁶⁷; теорема 5.1 опубликована с доказательством в работе⁶⁸.

⁶⁵ Ведерников В.А., Сорокина М.М. F -проекторы и F -покрывающие подгруппы конечных групп // Сибирский математический журнал, 2016. Т. 57, № 6. С. 1224–1239.

⁶⁶ Проблема В, глава III, § 3, Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992.

⁶⁷ Sorokina M.M. The F_Ω -covering subgroups and F_Ω -projectors of finite groups // Материалы Международной конференции «Groups and Graphs, Metrics and Manifolds», Екатеринбург, 2017. С. 96.

⁶⁸ Сорокина М.М. О существовании F_Ω -проекторов в конечных группах // Научно-технический вестник Поволжья. 2019, № 1. С. 12–14.

Глава 3. Моделирование формообразования деталей импульсным магнитным полем

3.1. Сущность магнитно-импульсной обработки металлов

Физика взаимодействия магнитного поля с металлами

Магнитно-импульсная обработка металлов имеет ряд особенностей, которые необходимо учитывать^{69,70}. Давление создается импульсным магнитным полем, и одной из уникальных особенностей данного процесса является отсутствие прямого воздействия на поверхность обрабатываемого объекта, и как следствие, отсутствие повреждений, наносимых самой обработкой, по сравнению с другими видами обработки металлов давлением.

Давление в скин-слое при магнитно-импульсной обработке создается за счет наведенных вихревых токов, которые создаются в заготовке и индукторе за счет разряда конденсаторной батареи. Данную систему можно представить, как классический колебательный контур (рис. 3.1).

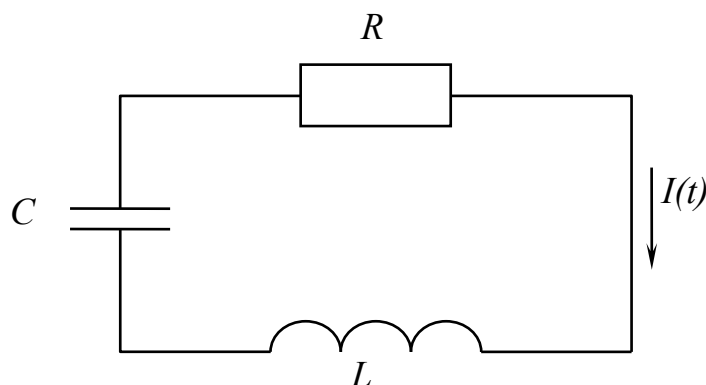


Рисунок 3.1. Упрощенная схема процесса

Возможные в колебательном контуре величины амплитуды давления импульсного магнитного поля и длительности импульса при импульсной штамповке деталей, определяются исходя из электрических параметров процесса.

Значение амплитуды давления (P_m), оказываемого импульсным полем на заготовку равно:

⁶⁹Белоусов В.С. Физические основы лазерной и магнитно-импульсной обработки. Уч.пособие. – Новосибирск: НЭТИ, 1991. - 63 с.

⁷⁰Белый И.В., Фертик С.М., Хименко Л.Т. Справочник по магнитно-импульсной обработке металлов.- Харьков, 1977. - 168 с.

$$P_m = \mu_{mn} \mu_o \frac{(H_{1m}^2 - H_{2m}^2)}{2} \quad (1)$$

где μ_{mn} – магнитная проницаемость среды;

μ_o – магнитная постоянная, равная $4\pi \cdot 10^{-6}$ Гн/м;

H_{1m} и H_{2m} – максимальные значения магнитной индукции на поверхностях заготовки соответственно.

Величина глубины проникновения (Δ_{np}) электрического тока в заготовку:

$$\Delta_{np} = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_{mn} \mu_o \gamma_{\Sigma}}} \quad (2)$$

где ω – круговая частота магнитного поля;

γ_{Σ} – удельная электрическая проводимость материала заготовки.

При толщине заготовки $\Delta_0 = 0,8$ мм и более для алюминиевого сплава можно считать, что величина проникновения импульсного магнитного поля в заготовку меньше толщины Δ_0 и воздействие магнитного поля оказывает исключительно на поверхность обрабатываемой заготовки, а с другой стороны заготовки магнитное поле полностью отсутствует, т.е. $H_{2m} \approx 0$. В воздушной среде величина $\mu_{mn} = 1$. Исходя из данных допущений, формула для расчета амплитуды давления, оказываемым магнитным полем на деталь (1), принимает следующий вид:

$$P_m = \frac{\mu_o H_{1m}^2}{2} \quad (3)$$

Ток (J), протекающий в цепи индуктора при разрядке конденсаторной батареи, приблизительно выражается уравнением гармонического колебания:

$$J = \frac{U_0}{L\omega} \exp\left(-\frac{R}{2L}t\right) \sin \omega t \quad (4)$$

где U_0 – напряжение зарядки батареи конденсаторов; L – общая индуктивность колебательного контура; R – общее сопротивление колебательного контура

Давление ИМП на неподвижную заготовку аппроксимируется затухающей квадратичной синусоидой (рис. 2):

$$p = P_0 \cdot \exp(-\beta t) \sin^2(\omega t) \quad (5)$$

где P_0 – значение амплитуды давления импульсного магнитного поля при работе магнитно-импульсной установки в режиме короткого замыкания (при условии мгновенной разрядки магнитно-импульсной установки);

β – логарифмический декремент затухания.

Круговая частота (ω) колебаний разрядного тока находится по формуле:

$$\omega = 2\pi \cdot f_J = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}. \quad (6)$$

Амплитуда давления импульсного магнитного поля, соответствующая первому полупериоду разряда (T_o) (см. рисунок 3.2), в несколько раз выше, чем во втором полупериоде и в последующих. В течение первого полупериода выделяется примерно 80% всей запасённой энергии магнитно-импульсной установкой⁷¹. Следовательно, в дальнейших расчётах можно принимать, что время действия давления импульсного магнитного можно принять равным времени первого полупериода T_o .

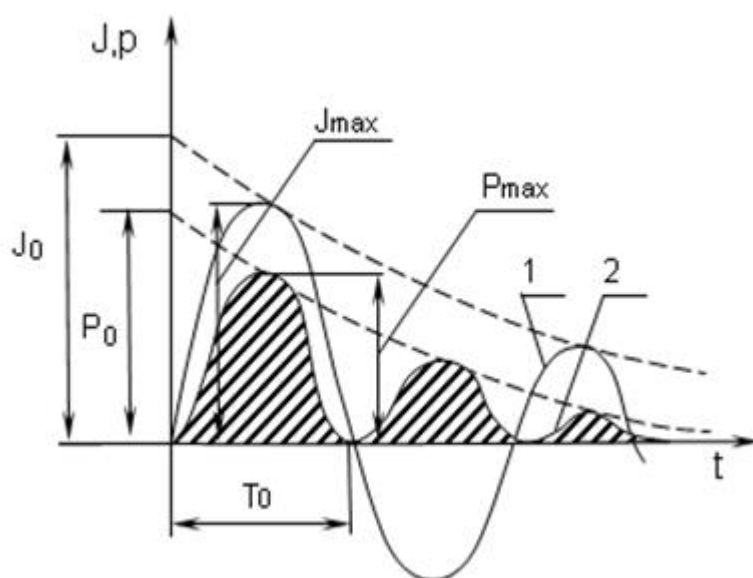


Рисунок 3.2. Зависимость измерения величины тока ($J(t)$) и давления ($p(t)$) во времени (1 – кривая тока; 2 – кривая давления)

Из приведенных выше рассуждений следует, что процесс расчета главного параметра процесса – количественной оценки необходимой запасаемой энергии установки, является достаточно сложным, поскольку является междисциплинарным. В дальнейшем будут рассмотрены типичные методы расчетов.

⁷¹Курлаев Н.В. Влияние импульсной обработки на технологические дефекты деталей : монография / Н.В. Курлаев, А.И. Гулидов. - : Издательство СО РАН, 2005. - 168 с.

3.2. Методы расчетов параметров процесса магнитно-импульсной обработки металлов

По своей природе процесс деформирования заготовки под действием импульсного магнитного относится к высокоскоростным методам деформирования металлов, к которым относится и ряд других методов, таких как различные виды штамповки взрывом. Высокоскоростные способы штамповки объединяет малая длительность процесса, как правило, не превышающая 10^{-3} с и скорость деформации, соизмеримая со скоростью распространения звука в материале. Такие особенности существенно расширяют диапазон возможных деформаций при штамповке, а так же в ряде случаев уменьшают сопутствующие дефекты, такие как гофрообразование, пружинение и т.д.

К технологическим параметрам, определяемым при расчете процесса формообразования деталей под действием импульсного магнитного поля относятся: напряжение и энергия зарядки конденсаторной батареи установки, необходимой для выполнения технологической операции; кроме того, необходимо рассчитать параметры индуктора – размеры и количество витков и в случае невозможности выполнения операции за один переход – количество переходов. Для определения технологических параметров сначала необходимо рассчитать потребную индуктивность системы «индуктор-заготовка» для заданных величин деформации и соответствующие ей частоты разрядного тока. На текущий момент имеется большой объем экспериментальных данных, которые позволяют оценить необходимые параметры процесса и аналитические методики, которые позволяют определить параметры процесса с достаточной точностью, кроме того, современные пакеты численного анализа не только позволяют точнее определить параметры штамповки магнитно-импульсным полем, но и показать поведение материала заготовки в процессе формоизменения.

В работах, посвященных высокоскоростному деформированию металлов⁷², а также высокоскоростной штамповке, отмечается, что свойства металлов при высоких скоростях деформирования меняются. Для описания высокоскоростного деформирования твердых тел, необходимы модели поведения материала, основанные не только на механике сплошных сред, но и на ряде других разделов физики твердого тела. Такие модели должны описывать не только упругое деформирование и пластическое течение, но и кинетику фазовых переходов и процессов, а также обратное влияние данных явлений на структуру материала и его физические свойства. В этом случае создание и использование такой модели становится проблематичным, так как с одной стороны необходимо знание всего множества свойств реального материала

⁷²Фомин В.М., Гулидов А.И., Сапожников Г.А. Высокоскоростное взаимодействие тел - Новосибирск: Издательство СО РАН, 1999. - 600 с.

в любом его состоянии, с другой стороны использование такой точной модели приводит к чрезмерным затратам непосредственно при ее использовании.

Динамическое поведение металлов за пределами упругости обнаруживает существенное изменение их статических свойств. По этому признаку металлы можно разделить на три группы⁷³: металлы, у которых повышается предел текучести при динамическом нагружении (например, медь и алюминий); ко второй группе относятся металлы, у которых проявляется снижение динамического предела текучести (мягкие стали); и металлы, у которых динамический предел текучести остается неизменным.

Все существующие на сегодняшний день теории, описывающие упругопластическое поведение тел, можно разделить на три подхода⁷⁴.

Первый подход основан на гипотезе Х. А. Рахматулина о существовании динамической диаграммы, устанавливающей связь между тензорами напряжения и деформации, которая в общем случае не совпадает со статической диаграммой деформирования, а зависит от скорости удара.

Второй подход, получивший название теории пластического течения, был заложен Б. Сен-Венаном, М. Леви и В. Прагером. Данный подход основан на том, что если существует в пространстве напряжений поверхность текучести, то на основании принципа максимума скорости диссипации механической энергии устанавливается зависимость скорости пластической деформации в виде

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^P = \lambda_p \frac{\partial F_T}{\partial \sigma_{ij}}, \dot{\varepsilon}_{ii}^P = 0 \quad (7)$$

а упругая часть деформации ε_{ij}^P определяется по закону Гука. Здесь λ_p - неопределенные множители, постоянные для данных значений компонент скорости деформации.

Третий подход предполагает, что при динамическом нагружении существуют соотношения между приращениями деформаций и напряжений. В случае одноосного растяжения или сжатия такая связь представима в виде:

$$A(\sigma, \varepsilon) \frac{\partial \omega}{\partial t} = B(\sigma, \varepsilon) \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + C(\sigma, \varepsilon) \quad (8)$$

Функции $A(\sigma, \varepsilon)$, $B(\sigma, \varepsilon)$ и $C(\sigma, \varepsilon)$ обычно определяют, используя данные динамических экспериментов с помощью мерного стержня Гопкинса. Такое описание среды используется для анализа распространения волн в одномерном приближении.

Наиболее целесообразна разработка и углубленное изучение относительно простых математических моделей. Возможности реализации и область применения

⁷³Wilson F. W. High-velocity forming of metals. - N.Y., 1969. - 182 p.

⁷⁴ Фомин В.М., Гулидов А.И., Сапожников Г.А. Высокоскоростное взаимодействие тел - Новосибирск: Издательство СО РАН, 1999. - 600 с.

математических моделей динамики упруго - пластического деформирования для исследования высокоскоростного деформирования зависят от используемых теорий динамического поведения материалов. Для исследования квазистатического деформирования материалов общепринятыми являются: теория пластического течения Прандтля-Рейса, теория пластичности Сен-Венана-Мизеса, теория упругопластических деформаций Генки-Надаи, теория деформации Ильюшина.

В работе⁷⁵ приводятся значения динамических пределов текучести различных материалов в условиях магнитно-импульсного деформирования. Данные по наиболее распространенным алюминиевым сплавам сведены в таблицу 3.1. При этом скорости деформации в случае использования магнитно-импульсного нагружения заготовок составляют $\dot{\epsilon} = (1,5...2,5) \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$.

Таблица 3.1

Пределы текучести алюминиевых сплавов

Марка материала	Статический предел текучести (σ_m) · 10 ⁸ , [Н/м ²]	Динамический предел текучести (σ_m) · 10 ⁸ , [Н/м ²]
АМцМ	5	13
АМгЗМ	9	19
АМг6М	15	30
Д16М	12.5	21
Д16Т	28	46

3.2. Аналитические методы расчетов

Деформация металла под действием импульсного магнитного поля носит междисциплинарный характер^{76,77}, поэтому расчеты носят приближенный характер, тем не менее данные расчеты позволяют определить возможность деформирования заготовки на заданную величину. В процессе деформирования заготовки происходит нагрев детали вихревыми токами, в момент контакта деформируемой части и заготовки по заготовке проходят волны сжатия-растяжения, в итоге в процессе деформации происходит множество явлений различной природы, которые невозможно учесть в аналитическом расчете.

⁷⁵Баландин Ю.А., Иванов Е.Г. Экспериментальное определение механических характеристик материалов при нагружении импульсным магнитным полем // Импульсное нагружение конструкций. - Вып.4. - Чебоксары: Чувашский гос. ун-т, 1973.- С. 3-12.

⁷⁶ Белый И.В., Фертик С.М., Хименко Л.Т. Справочник по магнитно-импульсной обработке металлов.- Харьков, 1977. - 168 с.

⁷⁷ Курлаев Н.В. Импульсное формообразование листовых деталей в самолето- и вертолетостроении : учебное. пособие/ Курлаев Н.В, Бобин К. Н., Гулидов А.И., Рынгач Н. А. - Новосибирск : Издательство НГТУ, 2012. - 84 с.

Существующие методики расчета режимов магнитно-импульсной штамповки основаны на гипотезе преобразовании энергии, запасенной в конденсаторной батарее, в работу деформации с КПД порядка 5-20%⁷⁸. Такой КПД объясняется тем, что большая часть энергии идет на обратимые упругие деформации (Рисунок 3.3, площадь фигуры ниже линии P_m , соответствующей давлению, при котором материал начинает пластически деформироваться), и только небольшая часть идет на не обратимые пластические деформации.

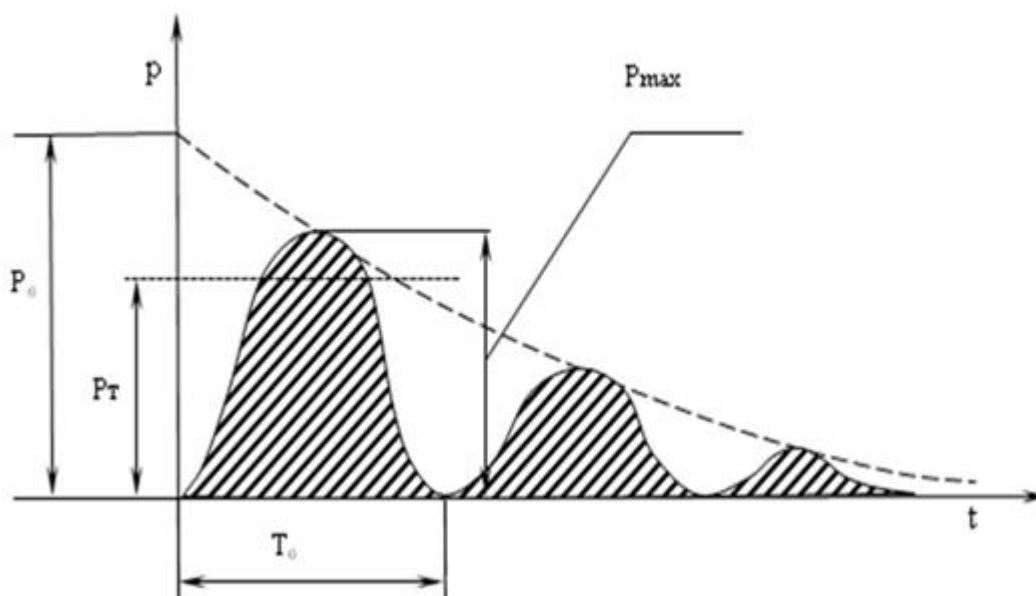


Рисунок 3.3. Соотношение давления ИМП (P_0) с давлением (P_T)

Кроме того, при аналитическом расчете используются следующие допущения:

- электрические параметры (сопротивление, индуктивность, электрическая емкость) в процессе разряда установки МИУ остаются постоянными;
- время разряда установки МИУ пренебрежительно мало по сравнению с временем деформирования заготовки;
- идеализация распределения магнитного поля, которое предполагается равномерным и существующим только между индуктором и заготовкой;
- объемные электродинамические силы, действующие в скин-слое заготовки заменяются давлением, действующим на поверхность заготовки;
- отсутствие влияния вязкости воздуха;
- материал оснастки считается абсолютно жестким.

⁷⁸ Белоусов В.С. Физические основы лазерной и магнитно-импульсной обработки. Уч.пособие. – Новосибирск: НЭТИ, 1991. - 63 с.

Одной из наиболее распространенных является методика, изложенная коллективом авторов (Белый И.В., Фертик С.М., Хименко Л.Т.) в справочнике по магнитно-импульсной обработке⁷⁹, которая была переработана и упрощена Белоусовым В.С.⁸⁰ В этой методике используется равенство магнитных полей W_M , выраженных через полные энергии тока, проходящего за время разряда через цилиндрический соленоид:

$$W_M = \frac{LI^2}{2} \quad (9)$$

где L - индуктивность;
 I - ток.

$$W_M = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (10)$$

где B – вектор магнитной индукции;

Исходя из равенства этих величин, можно вычислить значение индуктивности системы «индуктор-заготовка», частоту разрядного контура и соответствующее пиковое значение тока в индукторе и давление на поверхность заготовки.

3.3. Численные методы расчетов

Процесс высокоскоростного деформирования тел относится к виду задач, которые решаются в явной постановке⁸¹, т.е. в которых явно задается шаг по времени, который, в свою очередь, связан с разбиением тела конечно-элементной сеткой согласно критерию устойчивости Куранта-Фридрихса-Леви (11). Для устойчивого решения обычно принимается, что значение τ должно быть меньше в 10 раз правой половины:

$$\tau \leq \frac{h}{c} \quad (11)$$

где τ - шаг интегрирования по времени;
 h - наименьший шаг сетки;
 C – скорость звука в материале;

Данное условие накладывает ограничение на решения задачи, т.к. согласно этому условию с уменьшением величины уменьшается шаг интегрирования, что, в свою очередь, увеличивает количество итераций и общее время решения задачи. Поскольку задача деформирования материала под действием импульсного магнитного поля является междисциплинарной, то это дополнительно усложняет задачу - расчет

⁷⁹ Белый И.В., Фертик С.М., Хименко Л.Т. Справочник по магнитно-импульсной обработке металлов.- Харьков, 1977. - 168 с.

⁸⁰ Белоусов В.С. Физические основы лазерной и магнитно-импульсной обработки. Уч.посobie. – Новосибирск: НЭТИ, 1991. - 63 с.

⁸¹ Глушеников В.А., Курьянов Ю.Н. Магнитно-импульсная обработка материалов. Штамповка ожевалных оболочек: монография. – Самара: Издательский дом «Федоров», 2015.- 136 с.

магнитного поля и электромагнитных сил требует достаточно мелкой сетки на поверхности тел, что потребует меньший шаг по времени при расчете деформирования заготовок.

В общем случае для численного решения применяются уравнения законов сохранения, уравнения упругопластической модели Прандтля-Рейсса и соотношения отвечающие за процесс разрушения материала, в соответствии с:

Уравнения траектории материальных частиц:

$$\dot{x}_i = u_i \quad (12)$$

Уравнение неразрывности среды:

$$V_0 \rho_0 = V \rho \quad (13)$$

Закон изменения импульса материальной частицы:

$$\rho \dot{u}_i = \sigma_{ij,j} \quad (14)$$

Изменение внутренней энергии частицы:

$$\rho \dot{e} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} \quad (15)$$

Тензор скоростей деформаций имеет вид:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = 0.5(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) \quad (16)$$

Компоненты тензора напряжений представим следующим образом:

$$\sigma_{ij} = -\delta_{ij} P + s_{ij} \quad (17)$$

где x - координата, u - скорость, V - объем, ρ - плотность, σ, ε -компоненты тензора напряжения и деформации соответственно, e - внутренняя энергия, s_{ij} - девиатор тензора напряжений, отвечающий за сопротивление формоизменению материальной частицы, δ_{ij} - символ Кронекера, $P(\rho, e)$ - давление, как функция текущей плотности и энергии, точка обозначает производную по времени.

Тела занимают в декартовой системе координат $\{x_j\}$ области $D^i(x, t)$ с границами $G^i(y, t)$. Радиус-вектор континуальной частицы $x_i = x_i(x_i, t)$, y_i -точки границы. В общем случае области $D^i(x, y)$ изменяются во времени и могут быть многосвязными.

При решении конкретных задач исходные дифференциальные уравнения (3.1)-(3.6) дополняются начальными и граничными условиями.

Типовые начальные условия для каждого тела при $t=0$ (на начальный момент времени) в области $D^i(x, t)$ имеют вид:

$$\rho^i(x, 0) = \rho^{i0}(x), \quad u_j^i(x, 0) = u_j^{i0}(x),$$

$$s_{ij} = P = e = 0, \quad (18)$$

где $\rho^{i0}(x), v_j^{i0}(x)$ заданные распределения плотности материала и вектора скорости.

Для формулировки граничных условий вводятся следующие обозначения:

n^i - вектор внешней нормали к границе области $D^i(x,t)$;

$f^i(y,t)$ - вектор плотности внешних сил на границе $G^i(y,t)$;

$w^i(y,t)$ - вектор скорости на границе $G^i(y,t)$.

На любой границе $G^i(y,t)$:

1. Кинематические:

$$u^i(y,t) = w^i(y,t) \quad (19)$$

2. Динамические:

$$\sigma_{kl}^i(y^i, t) n_l^i = f_k^i(y^i, t), \quad (k,l=1,2,3) \quad (20)$$

где σ_{kl}^i - компоненты тензора напряжений на границе $G^i(y,t)$, которая, как правило, подлежит определению;

3. Смешанные

$$u^i(y,t) = w^i(y,t), \quad y^i \in G^{i\alpha}(y,t)$$

$$\sigma_{kl}^i(y^i, t) n_l^i = f_k^i(y^i, t), \quad y^i \in G^{i\beta}(y,t) \quad (21)$$

причем,

$$G^i(y,t) = G^{i\alpha}(y,t) \cup G^{i\beta}(y,t)$$

На контактах между телами граничные условия реализуются как условия силового равновесия (равенство напряжений) и непроникновения (равенство перемещений). На свободной поверхности условие силового равновесия выражается равенством нулю напряжений по нормали.

В процессе расчета в некоторый момент могут быть достигнуты определенные критерии, ограничивающие прочность материала, при которых реальный материал будет разрушаться. Если в некотором элементарном объеме выполнен хотя бы один из этих критериев, то полагается, что среда разрушилась, т.е. изменились ее прочностные свойства. При решении задачи расчета оптимальной амплитуды импульсной обработки такие параметры нагружения становятся неприемлемыми.

В целом постановка задачи численного моделирования поведения тела или системы тел при динамическом нагружении включает в себя задание определённого уравнения материалов, временной зависимости действующей на исследуемый объект нагрузки, начальных и граничных условий. Искомыми являются поля напряжений, деформаций, скоростей деформаций и кинематических величин в некоторой пространственно-временной области.

При численном решении системы (12) - (21) обычно вычисления производятся следующим образом. Области $D^i(x,0)$ ставится в соответствие расчетная

область, в которой задается конечное множество точек (узлов). Счетная область разбивается узлами на ячейки сетки (многоугольники или многогранники), не налегающими друг на друга и заполняющими счетную область без зазоров, при этом вершины ячеек являются узлами сетки. Компоненты векторов скорости и координат определяются в узлах сетки, а плотность, внутренняя энергия, компоненты тензоров напряжений, скоростей и деформаций считаются постоянными по ячейке и относятся к геометрическим центрам ячеек.

Расчет состоит из двух этапов. На первом этапе по известному полю скоростей определяется напряженное состояние в ячейке с учетом прочностных свойств среды. Затем, исходя из определенного тензора напряжений, находятся предварительные значения скоростей и координат узлов. При этом возможно перекрытие ячеек. На втором этапе реализуется условие непрерывности, которое состоит в вычислении сил реакций и истинных скоростей узлов, так, чтобы не было нарушения сплошности. Одним из основных моментов численного моделирования процессов взаимодействия твердых тел в лагранжевом подходе является реализация граничных условий на контактной поверхности.

Для реализации нагружения тела импульсным магнитным полем в уравнение (14) вводится сила Ампера:

$$\rho \dot{u}_i = \sigma_{ij,j} + f_i \quad (22)$$

где f_i - f_x, f_y, f_z

При этом уравнение электромагнитной силы $f = |\vec{j} \times \vec{B}|$ примет вид:

$$F_y(x, y, t) = \frac{B_m^2 \sqrt{2}}{\mu_0 \Delta} \exp\left(\frac{-2y}{\Delta}\right) \sin\left(\omega t - \frac{y}{\Delta} + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\omega t - \frac{y}{\Delta}\right) \quad (23)$$

где B_m - максимальное значение индукции на поверхности заготовки.

Характеристики электромагнитных процессов в разрядном контуре находятся в однозначной физической взаимосвязи, математически они образуют замкнутую систему уравнений, связей, и потому расчет имеет ряд особенностей (см. рисунок 3.4).

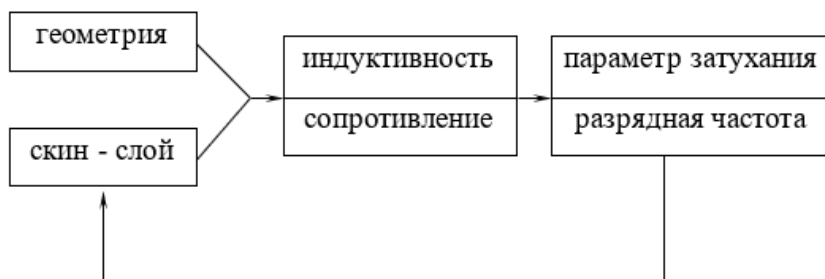


Рисунок 3.4. Замкнутая система величин

2.2.1 Реализация численного метода решения в KRUG24

Описанный выше подход был реализован в программном комплексе KRUG24⁸². В программный комплекс KRUG24 включен общий вид расчетных сил, в которые входят постоянные величины скин-слоев, индуктивности системы, параметра затухания, частоты, которые задаются в исходных данных для конкретной геометрии и требуют предварительного аналитического расчета.

Оценка достоверности результатов, получаемых с помощью программного комплекса KRUG24 в случае реализации нагружения импульсным магнитным полем, была произведена сравнением тестовых расчетов процесса обжата наконечников электрожгутов. Этот метод соединения широко используется при изготовлении бортовой проводки летательных аппаратов, поэтому существует большое количество данных о процессе, полученных экспериментально, что позволяет сравнить расчетные данные с экспериментальными и оценить достоверность получаемых результатов.

На рисунке 3.5 приведен пример численного моделирования магнитно-импульсного обжата наконечника диаметром 7 мм.

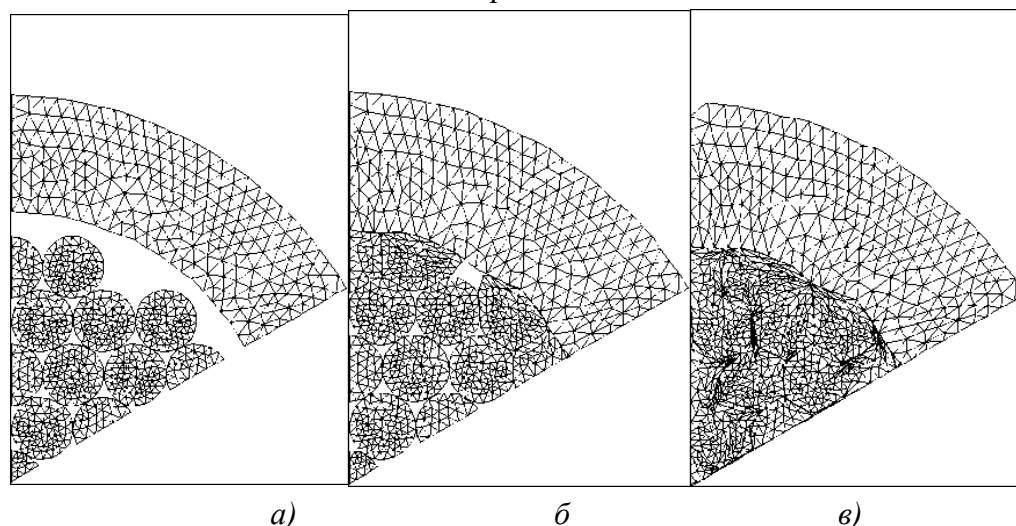


Рисунок 3.5. Кинематика обжата наконечника электрожгута:

а) – 5 мкс, б) – 15 мкс, в) – 25 мкс

Отклонение результатов расчета находятся в 5% по сравнению с экспериментальными данными, стоит так же отметить, что вид деформированных жил провода в расчете (рисунок 5в) совпадает с видом жил в сечении, полученным экспериментально (рисунок 6).

⁸² Курлаев Н.В. Влияние импульсной обработки на технологические дефекты деталей : монография / Н.В. Курлаев, А.И. Гулидов. - : Издательство СО РАН, 2005. - 168 с.

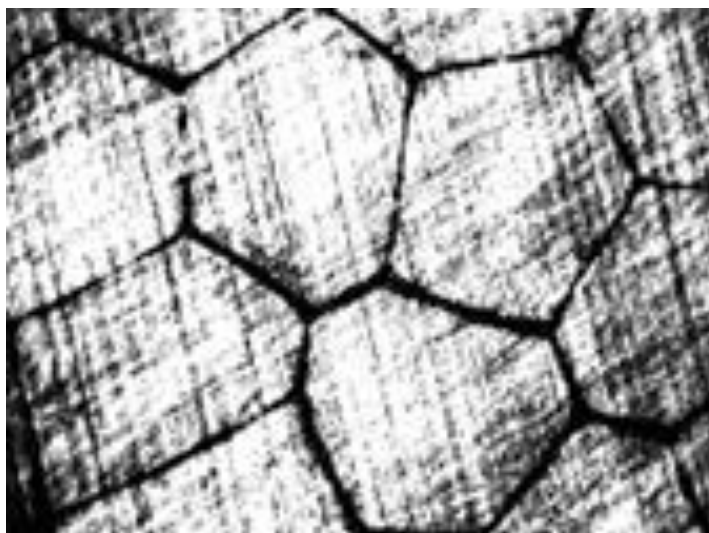


Рисунок 3.6. Фрагмент деформированной жилы обжатого электрожгута

2.2.2 Реализация численного метода решения в ANSYS Explicit

На сегодняшний день пакет ANSYS для инженерного анализа является одним из наиболее популярных, в том числе для междисциплинарных расчетов. В настоящее время в ANSYS Workbench реализован расчет для отдельных междисциплинарных задач, таких как термомеханические задачи, но готовых решений для полного расчета механического воздействия магнитных полей в настоящее время нет. Так же стоит отметить, что появление возможности импортировать поля в пакеты явного анализа, входящие в ANSYS Workbench появились сравнительно недавно в релизе 2019R3.

Одним из выходов – вместо совместного решения электродинамической и механической задачи воспользоваться заданием импульсного давления на поверхности заготовки. Данное приближение основано на двух фактах – малом, по сравнению с временем деформации заготовки, полупериодом колебания тока (рисунок 3.7) и первого пика давления, и малом зазоре между индуктором и заготовкой, обеспечивающим равномерное распределение магнитного поля. В этом случае значение периода и амплитуды давления предварительно рассчитывается аналитически или пакетах для электродинамических расчетов.

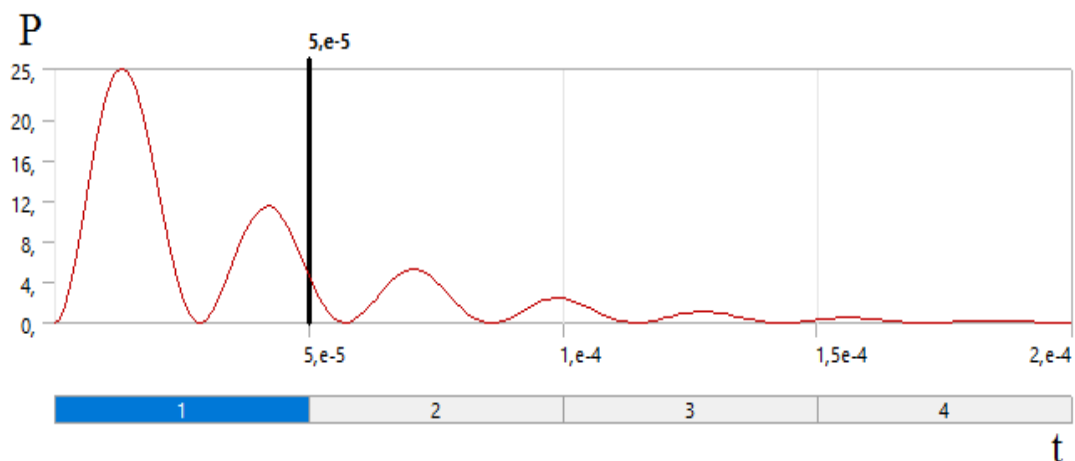


Рисунок 3.7. График изменения амплитуды давления

В качестве примера результатов таких расчетов можно привести процесс формообразования и вырубки жалюзи на сварной трубе (см. рисунок 3.8). Заготовка представляет из себя сварную трубу из алюминиевого сплава с продольным швом. По окружности трубы формируются конусообразные углубления и прорезаются отверстия.

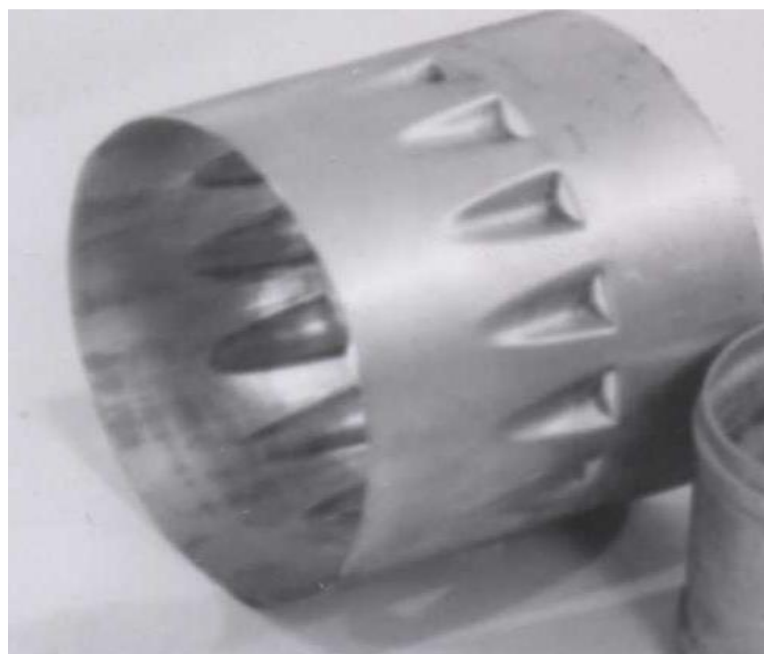


Рисунок 3.8. Общий вид трубы с прорубленными жалюзи

Общий вид расчетной зоны приведен на рисунке 3.9. В качестве матрицы был выбран материал, предел текучести которого превышает предел текучести заготовки

в несколько раз. Результаты численного моделирования процессов нагружения трубчатой заготовки для получения деталей с целью определения оптимальной величины давления ($P_{\max}$) на поверхность детали в зависимости от динамического предела текучести заготовки (Y_0) и геометрических параметров детали (D_0, δ_0) представлены на рисунке 3.10 и в таблице 3.2.

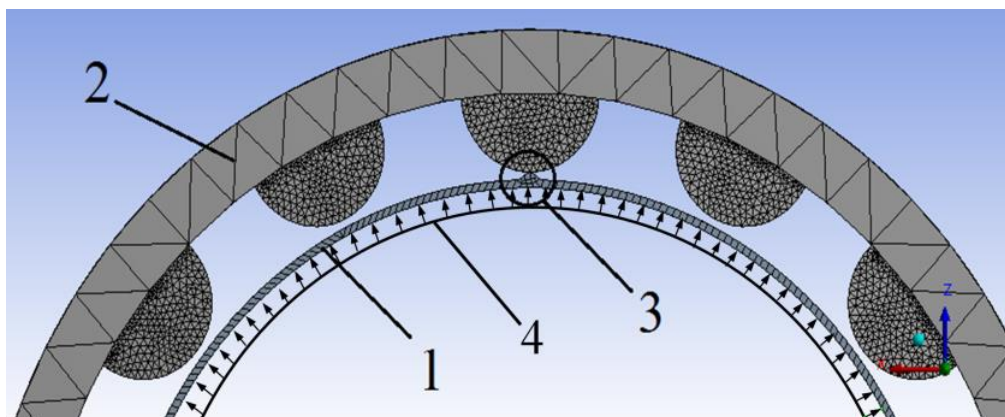


Рисунок 3.9. Расчетная схема нагружения

1 – заготовка, 2- матрица, 3 – сварной шов, 4 – распределенное давление

Таблица 3.2

Определения оптимальной величины давления ($P_{\max}$, МПа)

Y_0 , МПа	$D_0=50$ мм	$D_0=55$ мм	$D_0=60$ мм
185	14	13	12
200	15	14	13
250	17	16	15
325	22	20	19

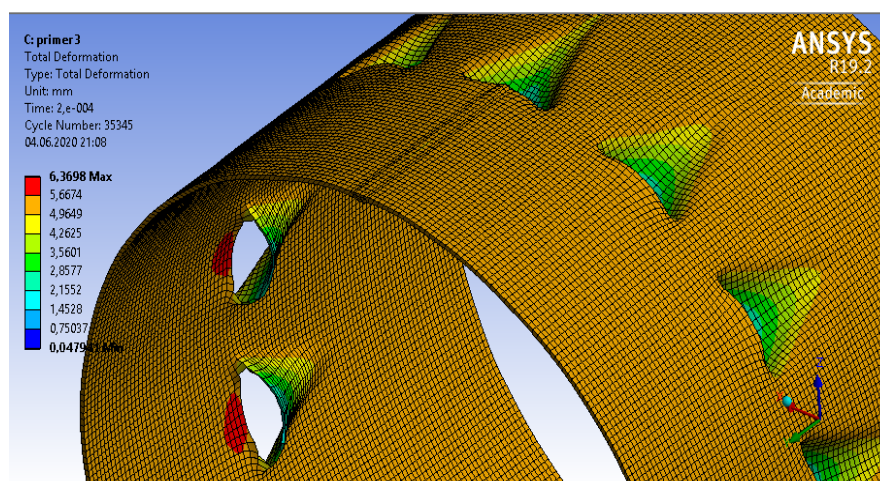


Рисунок 3.10. Визуализация результатов расчетов

Реализация численного метода решения LS-DYNA

В настоящее время единственным пакетом, в котором возможен полноценный расчет деформирования тел под действием электромагнитных сил с учетом сопутствующих явлений без каких-либо сторонних дополнений является пакет LS-DYNA, разработанный в Livermore Software Technology Corporation. В 2009 году в пакете появилась возможность проводить связанные электромагнитные, термические и механические расчеты за счет включения в пакет электромагнитного модуля⁸³. Стоит так же отметить, что пакет LS-DYNA обладает достаточно высоким порогом вхождения, что компенсируется его возможностями.

Ниже приведен пример моделирования в пакете LS-DYNA свободной штамповки с прижимом с усилием в 500 кН, приложенным по периметру заготовки (рисунок 11). После вычисления электромагнитных полей сила Лоренца оценивается в узлах конечных элементов и добавляется в механический решатель. Как механические, так и электромагнитные решатели имеют свой временной шаг, механический временной шаг меньше, чем электромагнитный в 10 раз. Тепловой решатель LS-DYNA предоставляет изотропные, ортотропные и анизотропные тепловые модели с тепловыми моделями фазовых переходов. На основе модели Берджесса температура используется в электромагнитном уравнении состояния для обновления проводимости. Джоулевый нагрев и пластический диссипативный нагрев обеспечивается тепловым решателем. Моделирование заготовки (рисунок 3.11, п.2) выполнено с помощью упругопластической кусочно-линейной модели LS-DYNA пластичности *MAT_PIECEWISE_LINEAR_PLASTICITY. Медная катушка индуктора с шестью витками (рисунок 3.11, п.1) представлена в виде абсолютно жесткого тела с площадью сечения катушки 13 мм × 15 мм с моделью материала *MAT_RIGID. Матрица (рисунок 11, п.3) представляет жесткое тело с использованием элементов оболочки. Всего модель состоит из 2916 элементов для катушки, 12340 для заготовки и 3225 оболочек для матрицы.

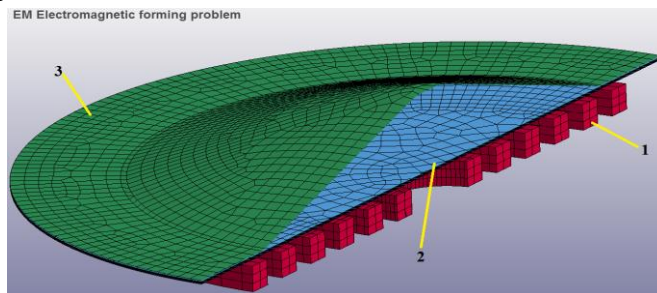


Рисунок 3.11. Продольное сечение конечно-элементного моделирования с шестью витками катушки: 1 – катушка; 2 – заготовка; 3 – матрица.

⁸³ P.L'Eplattenier, G. Cook, C. Ashcraft, M. Burger, J. Imbert, M. Metal Forming Introduction of an Electromagnetism Module in LS-DYNA for Coupled Mechanical-Thermal-Electromagnetic Simulations. - Steel Research International 80(5):351 - 358 • May 2009.

Результаты моделирования разряда 8 кДж представлены на рисунках 3.12 и 3.13. По результатам расчетов воздействия импульсного магнитного поля на заготовку установлено, что время деформирования составляло 0,0006 с. Таким образом, время воздействия на электромагнитного поля на заготовку мало по сравнению с временем деформирования заготовки, что позволяет в ряде случаев упрощать анализ процесса. Амплитуда непосредственно прилагаемого давления при этом составляет 10 МПа.

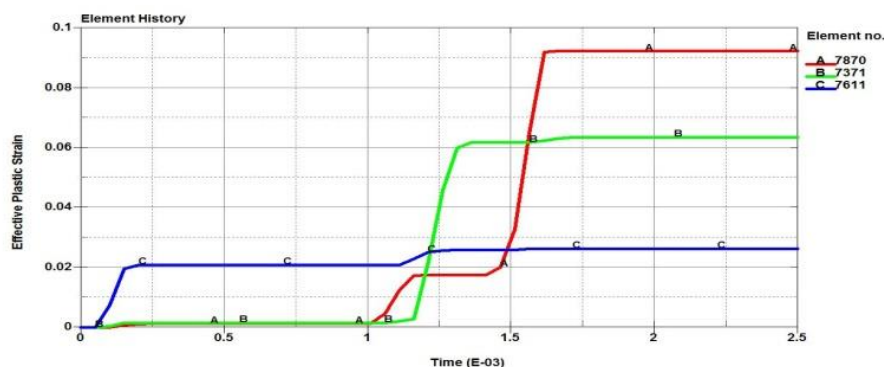


Рисунок 3.12. Пластическая деформация для контрольных элементов на заготовке:
А– центральная зона; В– коническая зона; С– плоская зона.

Качественная картина деформирования заготовки на рисунке 3.13 согласуется с данными, получаемыми в ходе экспериментов. Во время процесса пластическая деформация заготовки постепенно увеличивается от нуля до 2,64% для плоской зоны, и 6,37% для середины конической зоны и 9,29% для центральной зоны. При этом максимальная деформация составляет 16,6 % и находится в центре заготовки.

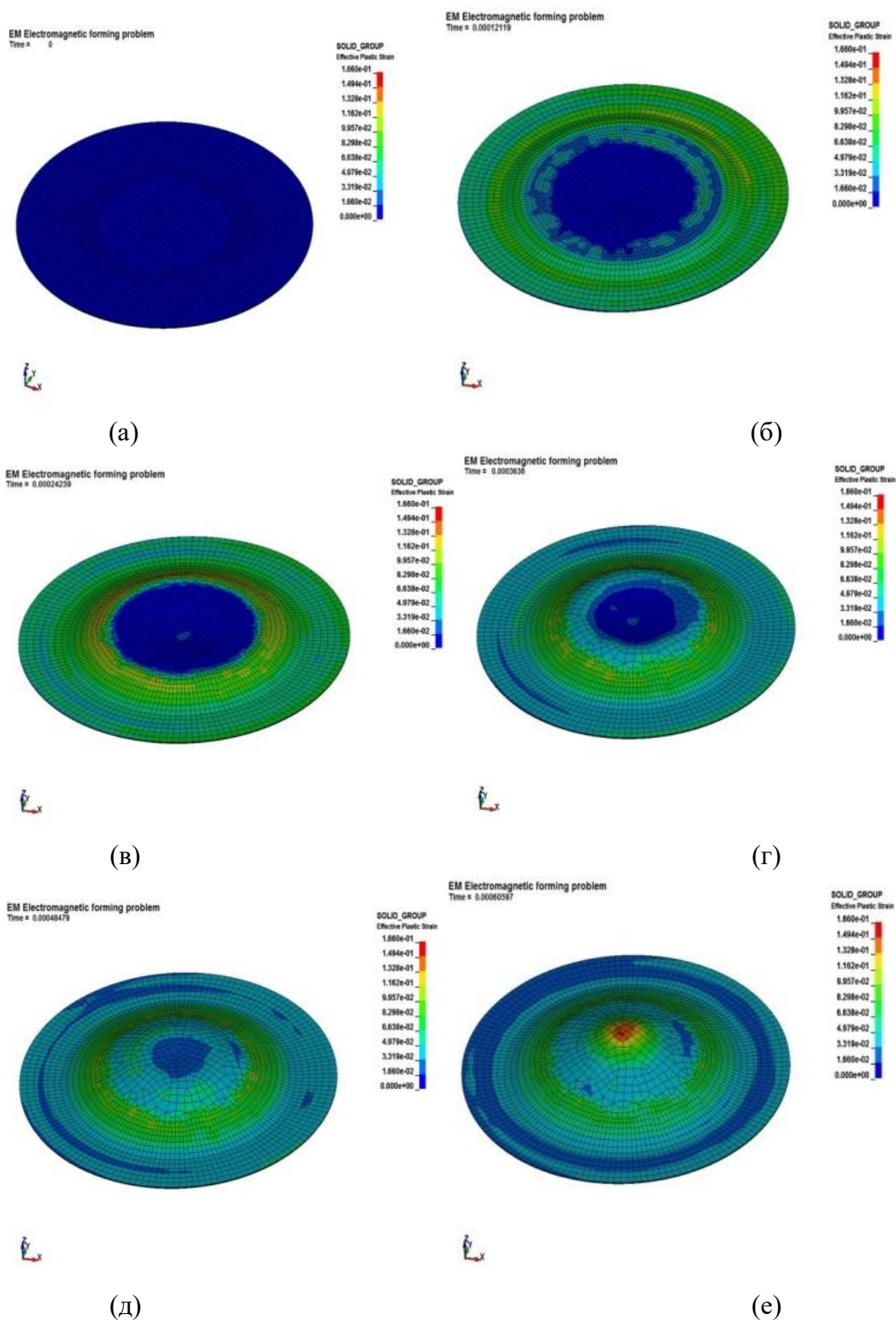


Рисунок 3.13. Пластические деформации на заготовке на разных этапах формирования от времени: а – 0 сек., б – 0,0001 с., в – 0,0002 с., г – 0,0003 с., д – 0,0005 с., е – 0,0006 с.

Заключение

В данной главе представлены наиболее обобщенные способы расчета технологических параметров магнитно-импульсной штамповки. Приведенные аналитические методы являются наиболее универсальными, но их разнообразие достаточно велико, в том числе для отдельных видов штамповки, таких как обжим и раздача трубчатых заготовок. Существующие пакеты явного численного анализа позволяют с достаточной точностью решать подобные задачи, но требуют достаточно высоких вычислительных затрат и определения динамических свойств материалов.

Из вышесказанного можно сделать вывод, что аналитические методы больше подходят для предварительного расчета, тогда как аналитические – для оптимизации и решения локальных проблем.

Библиографический список

1. Баландин Ю.А., Иванов Е.Г. Экспериментальное определение механических характеристик материалов при нагружении импульсным магнитным полем // Импульсное нагружение конструкций. - Вып.4. - Чебоксары: Чувашский гос. ун-т, 1973.- С. 3-12.
2. Белоусов В.С. Физические основы лазерной и магнитно-импульсной обработки. Уч.пособие. – Новосибирск: НЭТИ, 1991. - 63 с.
3. Белый И.В., Фертик С.М., Хименко Л.Т. Справочник по магнитно-импульсной обработке металлов.- Харьков, 1977. - 168 с.
4. Ведерников В.А. О -проекторах групп // Вопросы алгебры, 1985. Т. 1. С. 9–22.
5. Ведерников В.А. Элементы теории классов групп. – Смоленск: СГПИ, 1988.
6. Ведерников В.А., Сорокина М.М. Ω -расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп // Дискретная математика, 2001. Т. 13, № 3. – С. 125–144.
7. Ведерников В.А., Сорокина М.М. -проекторы и -покрывающие подгруппы конечных групп // Сибирский математический журнал, 2016. Т. 57, № 6. – С. 1224–1239.
8. Гречин И.В., Сороколетов П.В. Проектирование вычислительного комплекса для принятия решений, Известия ЮФУ. Технические науки, вып.2, 2008.
9. Глущенков В.А. Индукторы для магнитно-импульсной обработки материалов: учебное пособие. – Самара: Издательство «Учебная литература», 2013.- 148 с.
10. Глущенков В.А., Карпухин В.Ф. Технология магнитно-импульсной обработки материалов: учебное пособие. – Самара: Издательство «Учебная литература», 2014.- 208 с.
11. Глущенков В.А., Курьянов Ю.Н. Магнитно-импульсная обработка материалов. Штамповка ожевалых оболочек: монография. – Самара: Издательский дом «Федоров», 2015.- 136 с.
12. Каляев И.А. и др. Создание и внедрение отечественных высокопроизводительных вычислительных систем с реконфигурируемой архитектурой. Южный научный центр РАН, г. Ростов-на-Дону, 2018.
13. Каморников С.Ф., Селькин М.В. Подгрупповые функторы и классы конечных групп. – Минск: Беларуская навука, 2003.
14. Козленко Л. Проектирование информационных систем Часть 1. Этапы разработки проекта: стратегия и анализ., КомпьютерПресс 9'2001.
15. Курлаев Н. В. Теоретические основы самолето- и вертолетостроения : учеб. пособие / Н. В. Курлаев, Г. Г. Нарышева, Н. А. Рынгач. - Новосибирск : НГТУ, 2013. - 100 с.
16. Курлаев Н.В. Влияние импульсной обработки на технологические дефекты деталей : монография / Н. В. Курлаев, А. И. Гулидов. - : Издательство СО РАН, 2005. - 168 с.
17. Курлаев Н.В. Влияние импульсной обработки на технологические дефекты деталей : монография / Н.В. Курлаев, А.И. Гулидов. - : Издательство СО РАН, 2005. - 168 с.

18. Курлаев Н.В. Импульсное формообразование листовых деталей в самолето- и вертолетостроении : учебное. пособие/ Курлаев Н.В, Бобин К. Н., Гулидов А.И., Рынгач Н. А. - Новосибирск : Издательство НГТУ, 2012. - 84 с.
19. Кухарь В.Д. Индукторы, применяемые для магнитно-импульсной обработки металлов: учебное пособие / В.Д. Кухарь, А.К. Талалаев, А.Е. Киреева. - Тула : Изд-во ТулГУ, 2011. - 51 с.
20. Марка Д.А., МакГоуэн К.Л.. Методология структурного анализа и проектирования: Пер. с англ. — М., «Метотехнология», 1993.
21. Монахов В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов. — Минск: Выш. шк., 2006.
22. Нариньяни А.С. Недоопределенность в системах представления и обработки знаний // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1986. —№ 5. — С. 3 – 28.
23. Новиков Д.А. Управление проектами: организационные механизмы. М., ИПУ РАН, 2007.
24. Петуныкина Л. В. Технология изготовления деталей летательных аппаратов: учеб.-метод. пособие / Л. В. Петуныкина, Н. В. Курлаев, К. Н. Бобин. - Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2015. - 90 с.
25. Ракошиц Г.С. Электроимпульсная штамповка : учебное пособие - М.: издательство Высшая школа, 1990. - 190 с.
26. Скиба А.Н., Шеметков Л.А. О частично локальных формациях // ДАН Беларуси, 1995. Т. 39. № 3. — С. 123–143.
27. Скиба А.Н., Шеметков Л.А. Кратно ω -локальные формации и классы Фиттинга конечных групп // Матем. труды, 1999. Том 2, № 2. — С. 114–147.
28. Скиба А.Н., Шеметков Л.А. Частично композиционные формации конечных групп // Доклады НАН Беларуси, 1999. Т. 43, № 4. — С. 5–8.
29. Сорокина М.М. О существовании ω -проекторов в конечных группах // Научно-технический вестник Поволжья. 2019, № 1. — С. 12–14.
30. Талалаев А.К. Индукторы и установки для магнитно-импульсной обработки металлов. — М.: Информтехника, 1992. — 143 с.
31. Фомин В.М., Гулидов А.И., Сапожников Г.А. Высокоскоростное взаимодействие тел - Новосибирск: Издательство СО РАН, 1999. - 600 с.
32. Шаныгин С.И. Управление организацией проектного типа: стратегия и тактика. СПб., 2012.
33. Шеметков Л.А. Ступенчатые формации групп // Математический сборник, 1974. Т. 94. № 4. — С. 628–648.
34. Шеметков Л.А. Факторизации непростых конечных групп // Алгебра и логика, 1976. Т. 15, № 6. — С. 684–715.
35. Шеметков Л.А. Формации конечных групп. — М.: Наука, 1978.
36. Шеметков Л.А. О произведении формаций // Доклады АН БССР, 1984. Т. 28, № 2. — С. 101–103.
37. Шеметков Л.А. Локальные задания формаций конечных групп // Фундаментальная и прикладная математика, 2010. Т. 16, № 8. — С. 229–244.
38. Шмигирев Э.Ф. О некоторых вопросах теории формаций // в кн. «Конечные группы». — Минск: Наука и техника, 1975.
39. Юсупов Р.Ю., Глушников В.А., Курьянов Ю.Н. энергетические установки для магнитно-импульсной обработки материалов: монография. — Самара: Издательский дом «Федоров», 2013.- 128 с.

40. Baer R. Classes of finite groups and their properties // Illinois J. Math., 1957. V. 1. – P. 115–187.
41. Bauman S. A note on covering and avoidance properties in solvable groups // Proc. Amtr. Math. Soc., 1969. V. 21. – P. 173–174.
42. Beidleman S., Brewster B. -Covering subgroups of finite groups // Boll. Unione mat. ital., 1969. V. 3, Issue 6. – P. 987–992.
43. Carter R. Nilpotent self-normalizing subgroups of soluble groups // Math. Z., 1961. V. 75. – P. 136–139.
44. Carter R., Hawkes T. The π -normalizers of a finite soluble group // J. Algebra, 1967. V. 5, Issue 2. – P. 175–201.
45. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. – Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992.
46. Erickson R. Projectors of finite groups // Comm. Algebra, 1982. V. 10. – P. 1919–1938.
47. Forster P. Projektive Klassen endlicher Gruppen I. Schunck- und Gaschutzklassen // Math. Z., 1984. V. 186. – P. 249–278.
48. Gaschutz W. Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen // Jour. Math. Z., V. 80, Issue 4, 1963. – P. 300–305.
49. Gaschutz W. Lectures on subgroups of Sylow type in finite soluble groups – Canberra: Notes on Pure Mathematics 11, Australian Nat. Univ., 1979. – 98 p.
50. Hall P. A note on soluble groups // J. London Math. Soc. 1928. V. 3. P. 98–105.
51. Hartley B. On Fischer's analization of formation theory // Proc. London Math. Soc., 1969. V. 3. N 9. – P. 193–207.
52. Hawkes T. On formation subgroups of finite soluble group // J. London Math. Soc., 1968. V. 44, Issue 2. – P. 243–250.
53. Huppert B. Endliche Gruppen, I. – Berlin, Heidelberg, N.Y.: Springer, 1967.
54. P.L'Eplattenier, G. Cook, C. Ashcraft, M. Burger, J. Imbert, M. Metal Forming Introduction of an Electromagnetism Module in LS-DYNA for Coupled Mechanical-Thermal-Electromagnetic Simulations. - Steel Research International 80(5):351 - 358 · May 2009.
55. Schmid P. Lokale Formationen endlicher Gruppen // Math. Z., 1974. V. 137, Issue 1. – P. 31–48.
56. Schunck H. π -Untergruppen in endlichen auflösbaren Gruppen // Math. Z., 1967. V. 97, Issue 4. – P. 326–330.
57. Sorokina M.M. The π -covering subgroups and π -projectors of finite groups // Материалы Международной конференции «Groups and Graphs, Metrics and Manifolds», Екатеринбург, 2017. – С. 96.
58. Wilson F. W. High-velocity forming of metals. - N.Y., 1969. - 182 p.

Сведения об авторах

Бобин Константин Николаевич

к.т.н., кафедра самолето- и вертолетостроения.
ФГБУ ВО "Новосибирский государственный
технический университет"

Горепекина Анастасия Андреевна

аспирант по направлению "Математика и механика", Брянский государственный университет
имени академика И.Г. Петровского

Курлаев Николай Васильевич

д.т.н., профессор. кафедра самолето- и вертолетостроения. ФГБУ ВО "Новосибирский государственный технический университет"

Николаева Екатерина Алексеевна

аспирант ЮЗГУ

Рынгач Николай Анатольевич

к.т.н., кафедра самолето- и вертолетостроения.
ФГБУ ВО "Новосибирский государственный
технический университет"

Сорокина Марина Михайловна

доктор физико-математических наук/профессор кафедры математического анализа, алгебры и геометрии, Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского

Электронное научное издание
сетевого распространения

**Фундаментальные и прикладные
исследования в области технических и
физико-математических наук**

монография

По вопросам и замечаниям к изданию, а также предложениям к
сотрудничеству обращаться по электронной почте mail@scipro.ru

Подготовлено с авторских оригиналов



ISBN 978-5-6045106-4-3



Усл. печ. л. 2,7.

Объем издания 5,8 МВ

Оформление электронного издания: НОО Профессиональная наука, mail@scipro.ru

Дата размещения: 05.09.2020 г.

URL: <http://scipro.ru/conf/monographengineering050910.pdf>.